変分的構造をもつ反応拡散系と安定性解析

森田善久 Yoshihisa Morita
龍谷大学 理工学部 Ryukoku University
morita@rins.ryukoku.ac.jp

要旨

活性因子と抑制因子による反応とそれらの拡散現象を記述した反応拡散方程式系ではチューリング (Turing) の拡散誘導不安定性によるパターン形成が生じることがよく知られている．しかし，そのパターンを表す解の存在や安定性を数学的に証明するのは決して易しいことではない．Gierer-Meinhart 方程式や，FitzHugh-Nagumo 型の方程式の解構造はよく研究されているが，その成功はそれぞれのもつ非線形性の本質がうまくとらえられ深い解析ができたからである．しかし，その構造の複雑さ故，解析のためには特異摂動のようにその特徴をはっきり炙り出す特殊なパラメータ設定が必要となる．一方，チューリングの不安定性が起きるようなモデルではないが，Keller-Segel 方程式では，走化性による集中化が解の有限次元時間での爆発を引き起こすことが知られており，数学的にもよく研究され多数の魅力的な成果が報告されている．この場合は L^1 保存性と Lyapunov 関数の存在が解の性質や挙動の解析に本質的な役割を果たしている．

一般に反応拡散方程式のシステムでは，Ginzburg-Landau タイプの方程式のようにある汎関数の勾配流になっているものはかなり限定される．しかし，Keller-Segel 方程式のようにLyapunov 関数が存在し，さらに散逸性が満たされるような系では，無限次元力学系としての構造は勾配系に近くなる．ここでは，L^1 保存と Lyapunov 関数に焦点をあて，このような良い性質を持つ反応拡散方程式系のあるクラスの解構造について，一般的にどの程度まで自明でないことが示されるか，また，そのクラスを特徴づける性質について考察しながら，今回の連続講演では，以下のような話題について解説する予定である．
(i) L^1 保存則をもつ散逸系のモデル方程式としてよく知られている Cahn-Hilliard 方程式と phase-field 方程式系についての簡単なレヴィー　(ii) L^1 保存則を持つ反応拡散系におけるチューリングタイプの拡散誘導不安定性と安定パターン　(iii) Lyapunov 関数と Spectral comparison による勾配系的な構造の解析　(iv) 双安定な FitzHugh-Nagumo 方程式における定常フロント波 (standing wavefront) の存在と安定性．

文献

1) C.-N. Chen, S.-Y. Kung and Y. Morita, *Planar standing wavefronts in FitzHugh-Nagumo equations*, SIAM J.Math. Anal. **46** (2014), 657-690.
2) S. Jimbo and Y. Morita, *Lyapunov function and spectrum comparison for a reaction-diffusion system with mass conservation*, J. Differential Equations, **255** (2013), 1657-1683.
3) E. Latos, Y.Morita and T. Suzuki, *Stability and spectral comparison of a reaction-diffusion system with mass conservation*, preprint.
4) Y. Morita, *Spectrum comparison for a conserved reaction-diffusion system with a variational property*, J. Appl. Anal. Computation, **2** (2012), 57-71.
5) Y. Morita and T. Ogawa, *Stability and bifurcation of nonconstant solutions to a reaction-diffusion system with conservation of mass*, Nonlinearity, **23** (2010), 1387-1411.