

表面拡散方程式と平均曲率一定曲面

高坂良史

(神戸大学大学院海事科学研究科)

以下の曲面の発展方程式について考える.

$$V = -\Delta_{\Gamma(t)} H. \quad (1)$$

ここで, V は時間発展する曲面 $\Gamma(t)$ の法速度, H は $\Gamma(t)$ の平均曲率, $\Delta_{\Gamma(t)}$ は $\Gamma(t)$ 上の Laplace-Beltrami 作用素である. (1) は表面拡散方程式と呼ばれ, 1957 年に W. W. Mullins によって粒界溝の発展プロセスが表面拡散のみによる場合に, その発展プロセスを記述する方程式として紹介された ([2] 参照). $\mathcal{A}(\Gamma(t))$ を曲面 $\Gamma(t)$ の表面積とすると, (1) は $\mathcal{A}(\Gamma(t))$ の H^{-1} -勾配流として導出される. つまり, (1) は $\Gamma(t)$ によって囲まれた部分の体積を一定に保ちながら $\Gamma(t)$ の表面積を最小化するという変分構造をもつ. また, (1) は曲面を何らかの関数で表した場合, その関数を未知関数とする非線形 4 階放物型偏微分方程式として表記される.

本講演では 2 つの軸対象な曲面 $\Pi_i (\subset \mathbb{R}^3, i = 1, 2)$ をとり, Π_1, Π_2 にはさまれた回転面 $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathbb{R}^3$ に対して以下の境界条件を課して考える.

$$\angle(\Gamma(t), \Pi_i) = \theta_i, \quad (\nabla_{\Gamma(t)} H, \nu_i)_{\mathbb{R}^3} = 0 \quad \text{on } \Gamma(t) \cap \Pi_i. \quad (2)$$

ただし, $\nabla_{\Gamma(t)}$ は $\Gamma(t)$ 上の勾配ベクトル場, ν_i は $\Gamma(t) \cap \Pi_i$ での $\Gamma(t)$ の単位余法線ベクトルである. 境界条件 (2) は, エネルギー汎関数

$$\mathcal{A}(\Gamma(t)) - \gamma_1 \mathcal{A}(\Sigma_1(t)) - \gamma_2 \mathcal{A}(\Sigma_2(t))$$

に対する H^{-1} -勾配流を考えたときに自然に得られる境界条件である. ここで, $\Sigma_i(t)$ は Π_i 上で $\partial\Gamma(t)$ を境界にもつ曲面を表し, $\mathcal{A}(\Sigma_i(t))$ はその面積を表す ($\mathcal{A}(\Sigma_i(t))$ は濡れエネルギーと呼ばれる). $\theta_i = \arccos(\gamma_i)$ である.

(1)-(2) に対する定常曲面 ($V \equiv 0$ の場合の曲面) は平均曲率一定曲面となる. 今回は軸対象な場合を考えるので, Delaunay 曲面と呼ばれる平均曲率一定の回転面となる. 自己交差しないもののみ考えることにすると, Delaunay 曲面は球面, 円柱, アンデュロイド, カテナイド (この場合は平均曲率 0) となる.

本講演では Π_1, Π_2 の形状と (1)-(2) の定常曲面 (Delaunay 曲面) の安定性との関係について詳述する.

References

- [1] M. Athanassenas, *A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary*, J. Reine Angew. Math., 377(1987), 97–107.
- [2] W. W. Mullins, *Theory of thermal grooving*, J. Appl. Phys., 28(1957), 333–339.
- [3] T. I. Vogel, *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes*, SIAM J. Appl. Math., 47(1987), no. 3, 516–525.
- [4] T. I. Vogel, *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes. II. General contact angles*, SIAM J. Appl. Math., 49(1989), no. 4, 1009–1028.
- [5] T. I. Vogel, *Convex, rotationally symmetric liquid bridges between spheres*, Pacific J. Math., 224(2006), no. 2, 367–377.
- [6] T. I. Vogel, *Liquid Bridges Between Balls: The Small Volume Instability*, J. Math. Fluid Mech., 15(2013), no. 2, 397–413.