Kirchhoff 型方程式に対する特異摂動問題*

生駒 典久 (東北大学)

本講演では，以下の Kirchhoff 型方程式に対する特異摂動問題を考察する:

$$\text{(E)} \qquad -\varepsilon^2 m\left(\varepsilon^{2-N}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^N), \quad u > 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^N.$$

ただし $N \geq 1$, $m \in C([0,\infty),\mathbf{R})$, $V \in C(\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$, $f \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ は与えられた関数, $\|\nabla u\|_{L^2}^2 := \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$ とし, $0 < \varepsilon \ll 1$ はパラメータとする．方程式 (E) の特徴として，項 $m(\varepsilon^{2-N}\|\nabla u\|_{L^2}^2)$ による非局所効果が挙げられる．また, 関数 $m(s)$ が正定数と恒等的に等しい場合 ($m(s) \equiv \mathrm{const.} > 0$), 方程式 (E) は非線形 Schrödinger 方程式に対する特異摂動問題となることに注意する．この意味で方程式 (E) は非線形 Schrödinger 方程式を含むようなものである．

先行研究 [4–6] では, $N = 3$, $m(s) = a + bs$ $(a, b > 0)$ かつ $f(s)$ に対して $s \mapsto s^{-3}f(s)$ の単調増加性等を仮定し，関数 $V(x)$ の最小点や極小点に凝集する (E) の解の存在が示されている．

本講演の目的は非線形項 f として [1] において扱われているような非常に一般的なものに対して (E) の凝集解が存在するかを考察することである．特に，関数 $V(x)$ の極小点に凝集する解に興味がある．さらに，関数 $m(s)$ が 1 次関数以外の場合も扱い，次元についても 3 次元に限定せず，一般の次元において考察する．

本講演で扱うことができる $m(s)$ や $f(s)$ の例としては次が挙げられる: $f(s) = |s|^{p-1}s$ $(1 < p < (N+2)/(N-2)_+)$,

$$m(s) = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i s^{q_i}, \quad 0 < a_0, \quad 0 \leq a_i \ (1 \leq i \leq k), \quad 0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_k < \frac{2}{(N-2)_+}.$$

特に $1 \leq N \leq 3$ とすると $f(s) = |s|^{p-1}s$, $1 < p < 3$, $m(s) = a + bs$ の場合が含まれる．

証明は，[2, 3] の議論に沿って行う．そのために，定数係数 Kirchhoff 型方程式の最小エネルギー解を峠の定理により特徴付ける．その際にどのような条件を $m(s)$ に課せば良いかを考察する．

参考文献

[1] H. Berestycki and P.-L. Lions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983), 313–345 and 347–375.
[2] J. Byeon and L. Jeanjean, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **185** (2007) 185–200 and **190** (2008), 549–551.
[3] J. Byeon, L. Jeanjean and K. Tanaka, *Comm. Partial Differential Equations* **33** (2008), 1113–1136.
[4] Y. He, G. Li and S. Peng, *Adv. Nonlinear Stud.* **14** (2014), 483–510.
[5] X. He and W. Zou, *J. Differential Equations* **252** (2012), 1813–1834.
[6] J. Wang, L. Tian, J. Xu and F. Zhang, *J. Differential Equations* **253** (2012), 2314–2351.

* Universidade Federal do Pará 所属の G. M. Figueiredo 氏と J. R. Santos Júnior 氏との共同研究に基づく．