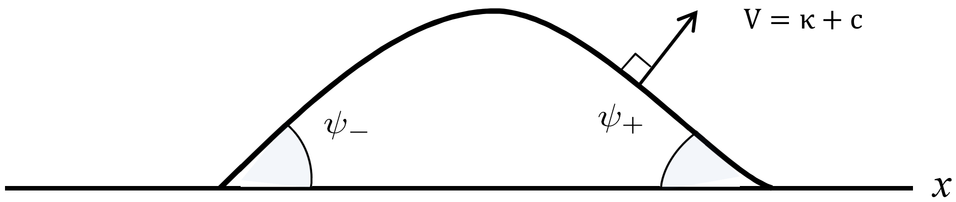
外力項付き曲率流の自由境界問題

下條　昌彦（岡山理科大学・理学部・応用数学科）

本講演では $\mathbf{V}=\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{c}$ という形の曲線の運動方程式について議論する．ここで V は曲線の法線速度を表し，κ は曲率で c は正の定数である．曲線は上半平面にありその端点の動きは直線に拘束されており，その接触角が下図のように左側は ψ_-，右側は ψ_+ という一定の角度で固定された自由境界問題を考察する．物理的には接触点は表面張力の効果で左右に移動することを意味している．曲線短縮流 $V=\kappa$ の場合に関しては A. Magni, C. Mantegazza and M. Novaga[5]や X. Chen, J.S. Guo, K. Ito and Y. Kohsaka [2,3]による一連の研究があり，解の漸近挙動や解曲線の凸性や特異性の分類などが行われた．より一般の曲線運動の自由境界問題に関しては M. Sato, E. Yanagida, S. Ei による定常解の安定性の結果がある．また高坂良史氏による最近の高階放物型方程式の一連の考察とも関連があり，国内外で活発に研究がなされている．



まず解の挙動の**分類定理**を紹介する．以下の挙動ですべての場合が尽くされる．

(A) 曲率の影響が大きい場合，有限時間で曲線が一点に縮み，曲率が爆発する．

(B) (A),(C)の効果が釣り合って解曲線が長さと面積を上下から有界に保ち続ける．

(C) 外力項が曲率の影響を打ち消していき，解が無限に広がっていく．

次に(A),(C)の場合に解の**漸近挙動**を解析する．(A)は曲線短縮流の扱いに近く，爆発問題の解析手法が有効であり，時空間のスケーリングに基づく漸近的手法を用いる．(C)の解析には対応する Hamilton Jacobi 方程式の解と比較原理を利用する．一方(B)の場合は，横方向に一定スピードで移動する進行波に収束することが証明できた．証明では移動境界の漸近挙動を調べるために，接触角条件に付随した新しい交点数の理論を開発する必要がある．最後に(A),(B)の場合について解の**漸近凸性**を議論する．1987 年に Grayson はどんな単純閉曲線を与えてもそれを初期値とする曲線短縮流の解曲線はそのうち凸曲線になることを示している([1,4,6]はエレガントな新証明)．(A)の場合の結果は Grayson の結果を自由境界問題で考えたものである．漸近凸性は二通りの証明が可能である．新しく導入した交点数の議論を用いても良いし，存在定理(正則性)を深化させても証明できる．なおこの３つのケースを実現する非自明な解は系統的な構成が可能である．本研究は俣野博氏(東京大学)，J.S. Guo 氏(淡江大学)，C.H. Wu 氏(台南大学)との共同研究である．

参考文献

[1] B.Andrews, P.Bryan, Curvature bound for curve shortening flow via distance comparison and a direct proof of Grayson's theorem, Journal für die reine und angewandte Mathematik 653 (2011),179-187.

[2] Y.-L.Chang, J.-S.Guo, Y.Kohsaka, On a two-point free boundary problem for a quasilinear parabolic equation, Asymptotic Analysis 34 (2003), 333-358.

[3] X.Chen, J.-S.Guo, Motion by curvature of planar curves with end points moving freely on a line, Math. Ann. 350 (2011), 277-311.

[4] A.Magni, C.Mantegazza, A note on Grayson's theorem, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Calculus of variations and geometric measure theory (2013).

[5] A.Magni, C.Mantegazza and M.Novaga, Motion by curvature of planar networks II, arXiv:1301.3352 (2013).

[6] C. Mantegazza, Lecture Notes on Mean Curvature Flow, Birkhaeuser, 2012.
(Angenent,Grayson や Gage-Hamilton の古典的結果を最近の手法でコンパクトに解説)