

Part I: 交点数理論の基礎

Part II: 進行波と交点数

Part III: 爆発問題と交点数

Part IV: 曲率流と交点数

下條 昌彦 (岡山理科大学)

2015/10/30-31 : 応用数学勉強会 2015

目次

1	Part I — 零点数の非増大則	(3)
1.1	スツルムの第一法則	(11)
1.2	スツルムの第二法則	(17)
2	Part II – 進行波問題への応用	(46)
3	Part III – 爆発問題への応用	(56)
3.1	時間大域解の有界性	(70)
3.2	爆発後の解の延長可能性	(75)
4	Part IV – 曲線短縮流への応用	(80)
4.1	$V = k^\alpha \quad \alpha \in (0, 1]$	(100)

1 Part I — 零点数の非増大則

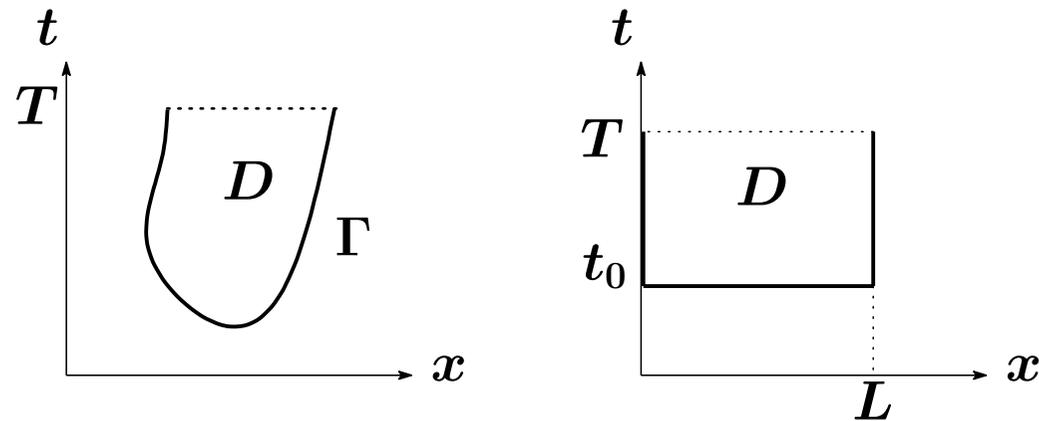
最大值原理

$n = 1$ 次元の問題

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u, \quad (x, t) \in D \quad (1)$$

$a > 0$ $c \leq 0$ a, b, c 有界, $D \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域.

Γ : D の放物型境界



例 長方形 $D = (0, L) \times (t_0, T)$, $\Gamma = (\{0, L\} \times (t_0, T]) \cup [0, L] \times \{t_0\}$.

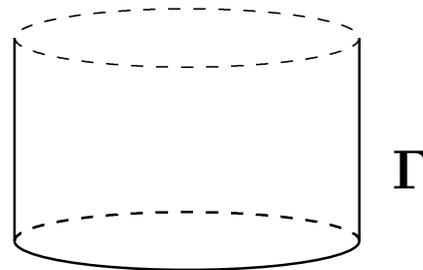
n 次元の場合

$$u_t = \sum_{i=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u, \quad (x, t) \in D \quad (2)$$

(a_{ij}) 各点 (x, t) において正定値対称行列 $a_{ij} = a_{ji}$

$c \leq 0$ $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty$ $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 有界領域.

例 長方形 $D = \Omega \times (t_0, T)$ 柱状領域



定理 1.1 u は D 上で x について C^2 級, t について C^1 級関数で \bar{D} の上で連続かつ (2) または (1) を満たす.

(A) 最大値 $M \geq 0$ または (B) $c = 0$ で M が有界. このとき

$$\max_{\bar{D}} u = \max_{\Gamma} u \quad (3)$$

例: $u_t = \Delta u$, $D = \Omega \times (0, T)$ の場合物体 Ω の内部で熱の吸収がない場合は $t \in [0, T]$ での温度の最大値は初期時刻または境界で達成される.

証明: $n = 1$ のみ

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u, \quad (x, t) \in D$$

結論を否定すると

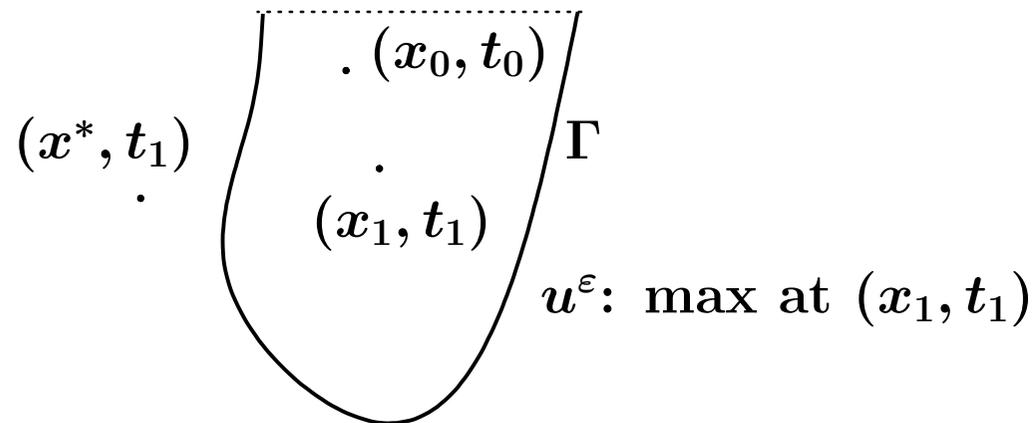
$$\exists (x_0, t_0) \in \bar{D} \setminus \Gamma \quad \text{s.t.} \quad u(x_0, t_0) > \max_{\Gamma} u.$$

$$u^\varepsilon := u(x, t) + \varepsilon|x - x^*|^{2m} \quad \text{for } (x^*, t) \notin D.$$

\bar{D} 上で一様に $u^\varepsilon \rightarrow u$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). 特に $\max_{\Gamma} u^\varepsilon \rightarrow \max_{\Gamma} u$ ($\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\varepsilon \ll 1 \quad \text{のとき} \quad u^\varepsilon(x_0, t_0) > \max_{\Gamma} u^\varepsilon$$

$\Rightarrow (x_1, t_1)$ で u^ε の \bar{D} での最大値が達成されているなら $(x_1, t_1) \notin \Gamma$.



$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u$$

このとき $u_x^\varepsilon(x_1, t_1) = 0$, $u_{xx}^\varepsilon(x_1, t_1) \leq 0$, $u_t^\varepsilon(x_1, t_1) \geq 0$. (A) または (B) より

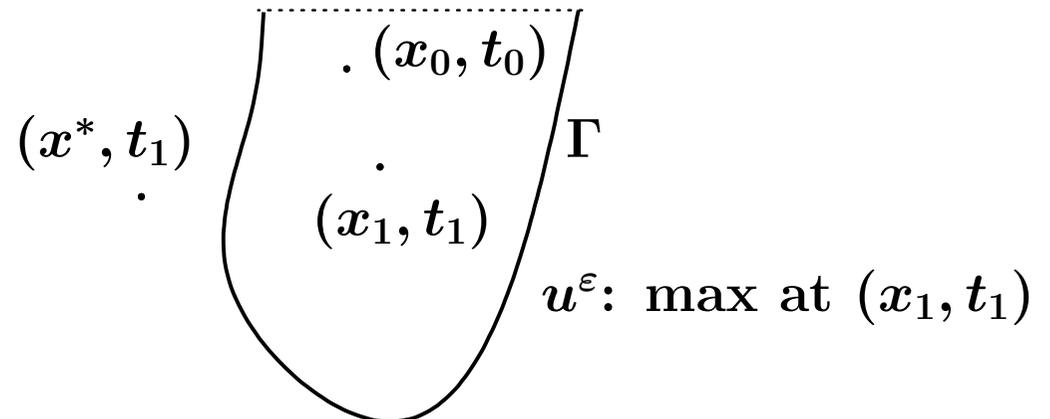
$$u_t^\varepsilon \geq au_{xx}^\varepsilon + bu_x^\varepsilon + cu^\varepsilon \quad \text{at } (x_1, t_1)$$

一方 $m \gg 1$ に選べば次の矛盾を得る.

$$u_t^\varepsilon = u_t = au_{xx} + bu_x + cu < au_{xx}^\varepsilon + bu_x^\varepsilon + cu^\varepsilon$$

ここで $u^\varepsilon := u(x, t) + \varepsilon|x - x^*|^{2m}$, $u_{xx}^\varepsilon - u_{xx} = 2m(2m - 1)\varepsilon|x - x^*|^{2m-2} \gg$

$2m\varepsilon|x - x^*|^{2m-1} = |u_x^\varepsilon - u_x|$ を使った.



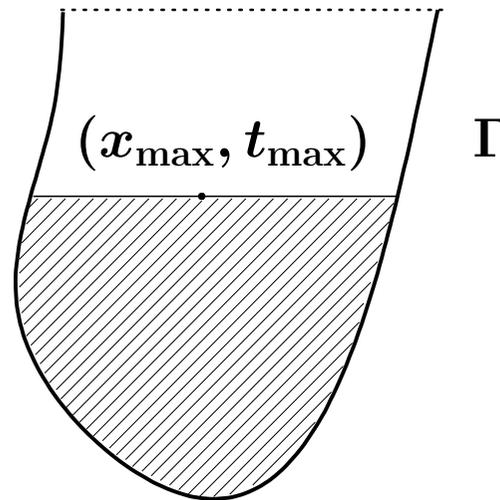
系 1.2 u は D 上で x について C^2 級, t について C^1 級関数で \bar{D} の上で連続かつ

$$u_t \leq \sum_{i=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u, \quad (x, t) \in D$$

を満たすとする. このとき $\max_{\bar{D}} u = \max_{\Gamma} u$

定理 1.3 (強最大値原理)

\bar{D} 上での u の最大値 $M = 0$ が $\bar{D} \setminus \Gamma$ でのある点 (x_{\max}, t_{\max}) で達成されるならば下図の斜線領域で $u \equiv 0$.



注意 1 境界条件に指定がないので，斜線の上の方で何が起こるかは不明．もし Dirichlet 0 の境界条件ならば 0.

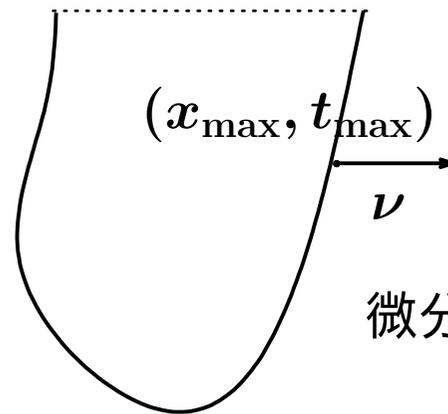
強最大値原理は D が非有界でも成立．(Protter-Weinberger)

定理 1.4 (Hopf の境界補題)

$$D = \Omega \times (0, T)$$

\bar{D} 上での u の最大値 $M = 0$ が Γ のある点 $(x_{\max}, t_{\max}) \in \partial\Omega \times (0, T]$ で達成されたとし, $u(x, t_{\max}) < M$ ($x \in \Omega$) とする. このとき

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_{\max}, t_{\max}) > 0.$$



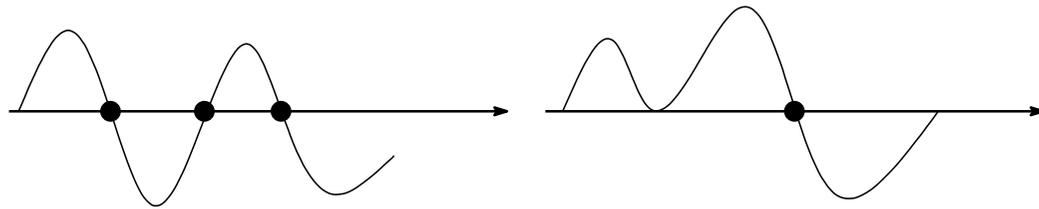
微分非退化 (ゼロにならない)

1.1 スツルムの第一法則

区間 $[0, L]$ 上で定義された連続関数 $w(x)$ に対し $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = L$

$$w(x_i)w(x_{i+1}) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, m - 1$$

を満たしえるようなものが存在するような最大の整数 m に対して $Z[w] = m - 1$ を区間 $(0, L)$ における零点数 (または m を w の符号変化回数) とよぶ.

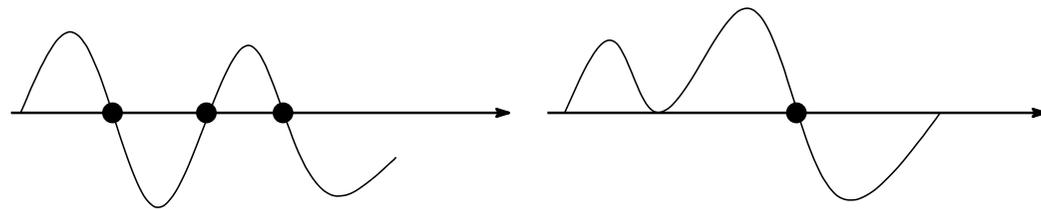


交点数は 1 と数える

第一法則の証明の簡便さを考慮して退化する場合に関してはこのように定義する.

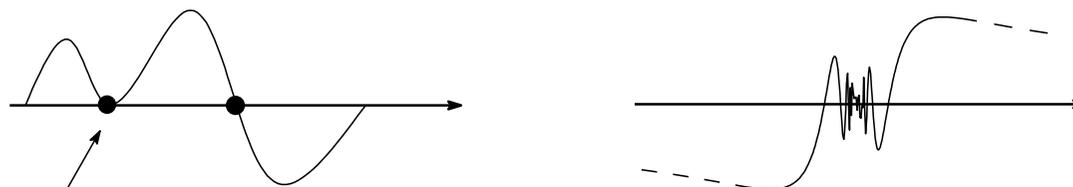
補足事項:

第一法則の証明の簡便さを考慮して退化する場合に関しては下のように定義する。



交点数は 1 と数える

第二法則によると次のようなケースは瞬時に消える



退化した交点はすぐに消える無限回の振動は一瞬で有限回になる

定理 1.5 $a > 0, a, b, c \in L^\infty$, w は t に関して C^1 級で x に関して C^2 級.

$$\begin{cases} w_t = a(x, t)w_{xx} + b(x, t)w_x + c(x, t)w, & x \in (0, L), t \in (t_0, T), \\ w(0, t) = w(L, t) = 0. \end{cases}$$

このとき

$$Z[w(\cdot, t_1)] \geq Z[w(\cdot, t_2)], \quad t_0 \leq \forall t_1 < \forall t_2 \leq T.$$

注意 2 Polya の再発見, Galaktionov-Vazquez による爆発問題への応用,

Matano による ω -極限集合の解析 (定性的理論)

ノイマン境界条件やロバン境界条件でも良い.

$c(x, t)$ には符号の条件などは不要.

$m_1 = Z[w(\cdot, t_1)] + 1$, $m_2 = Z[w(\cdot, t_2)] + 1$ とおく. $m_1 < m_2$ と仮定する.

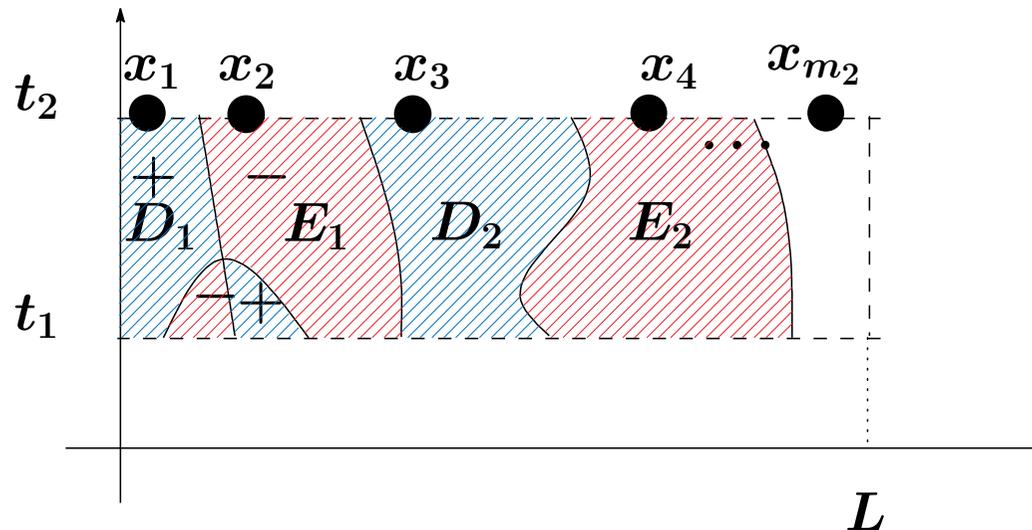
$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m_2} < L$ があって

$$w(x_i, t)w(x_{i+1}, t) < 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m_2 - 1)$$

$w(x_1, t_2) > 0$ と仮定して一般性を失わない.

$D_j := \{(x, t) \in (0, L) \times [t_1, t_2] \mid w(x, t) > 0\}$ の連結成分で (x_{2j-1}, t_2) を含むもの

$E_j := \{(x, t) \in (0, L) \times [t_1, t_2] \mid w(x, t) < 0\}$ の連結成分で (x_{2j}, t_2) を含むもの



補題 1.1 $D_j \cap \{t = t_1\} \neq \emptyset$, $E_j \cap \{t = t_1\} \neq \emptyset$

$D_j := \{(x, t) \in (0, L) \times [t_1, t_2] \mid w(x, t) > 0\}$ の連結成分で (x_{2j-1}, t_2) を含むもの

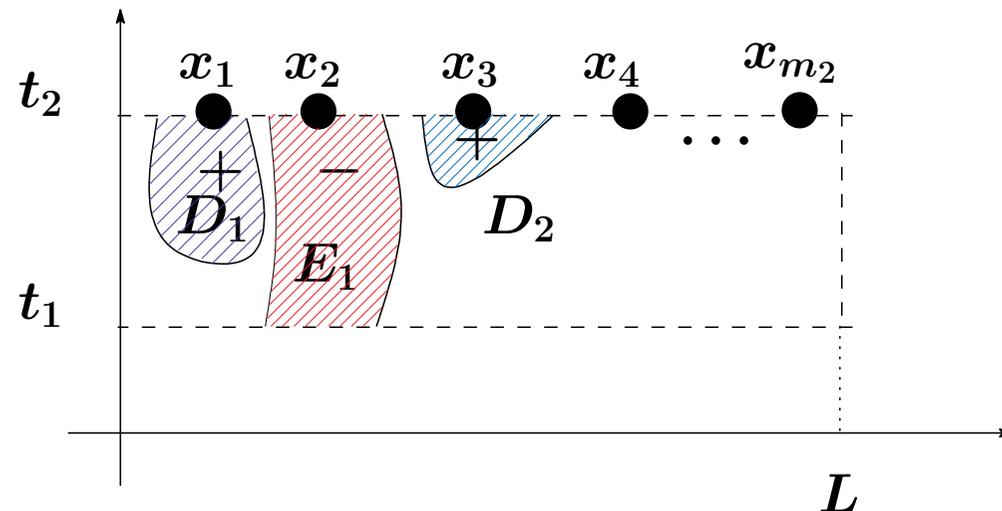
$E_j := \{(x, t) \in (0, L) \times [t_1, t_2] \mid w(x, t) < 0\}$ の連結成分で (x_{2j}, t_2) を含むもの

証明 $w(x_1, t_2) > 0$ と仮定して一般性を失わない. $\tilde{w} = e^{-kt}w$ とおくと

$$w_t = aw_{xx} + bw_x + cw \quad \Rightarrow \quad \tilde{w}_t = a\tilde{w}_{xx} + b\tilde{w}_x + (c - k)\tilde{w}$$

最大値原理: 直線 $t = t_1$ まで達しないとする.

$\Rightarrow D_j$ または E_j の放物型境界で $w \equiv 0 \Rightarrow \max_{D_j} w = 0$ より矛盾 (D_j で正!)



補題 1.1 より各 (x_{2j-1}, t_2) から D_j 内の曲線 γ_j で直線 $t = t_1$ に達するものが描ける。同様に各 (x_{2j}, t_2) から E_j 内の曲線 $\tilde{\gamma}_j$ で $t = t_1$ に達するものが描ける。

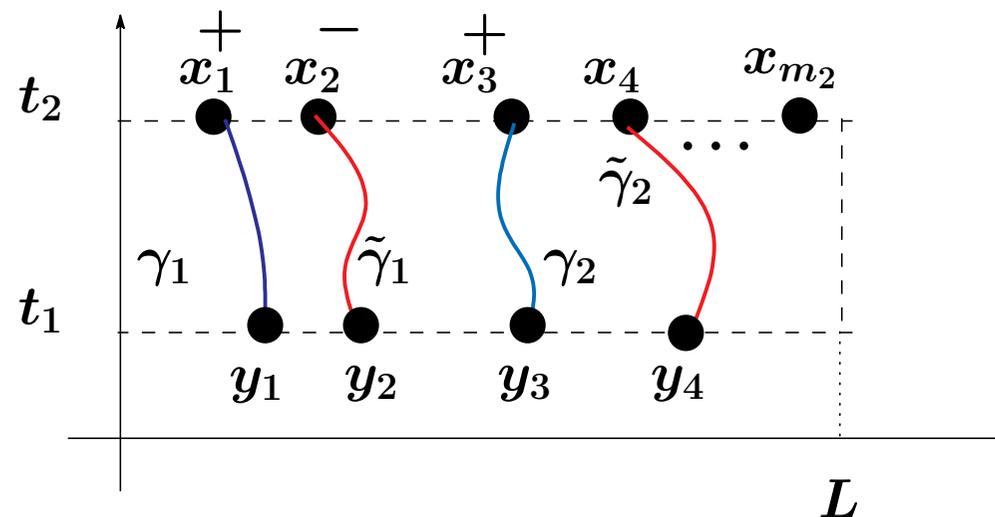
各 γ_j が直線 $t = t_1$ に達した点を (y_{2j-1}, t_1) とおく。

各 $\tilde{\gamma}_j$ が直線 $t = t_1$ に達した点を (y_{2j}, t_1) とおく。

γ_j と $\tilde{\gamma}_j$ は交わらないので

$$y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_{m_2}.$$

したがって, $m_1 > m_2$.



1.2 スツルムの第二法則

$$w_t = a(x, t)w_{xx} + b(x, t)w_x + c(x, t)w \quad a \geq \delta > 0 \quad (4)$$

w : t について C^1 級で x について C^2 級

定理 1.6

- (i) $\forall t \in (t_0, T)$ に対して $x \mapsto w(x, t)$ の $(0, L)$ または \mathbb{R} 上の零点はすべて孤立.
- (ii) $w(x, t)$ が $t = t_1$ で多重零点を持ったとする. すなわち $w(x_0, t_1) = w_x(x_0, t_1) = 0$ となる $x_0 \in (0, L)$ を有するならば

$$Z[w(\cdot, t_1 - 0)] > Z[w(\cdot, t_1 + 0)] \quad (5)$$

注意 3

(i') 下の境界条件のときは零点は端点にも集積しないので個数が有限個.

(1) 区間 $(0, L)$ で Dirichlet-0, Neumann-0, Robin 条件, Dirichlet- $\neq 0$

(2) \mathbb{R} で $|u(x, t)| \leq Ce^{\alpha|x|^2}$ $t \in [t_0, T]$ を課す

(ii') 区間 $(0, L)$ で Dirichlet-0 の場合は $x_0 = 0, L$ であっても (5) が成立する.

- 証明方法 1 解が x, t について解析的であることが保証されている場合

ベキ級数展開を用いる (スツルムの議論 1830 年代)

- 証明方法 2 一般の場合 (半群論, 関数解析的)

時空間のリスケーリング + 解の漸近挙動 (Angenent 1988). degenerate する

場合は方法 1 に帰着. まず \mathbb{R} 全体で示し $(0, L)$ では \mathbb{R} 全体に拡張して証明.

幾つかの具体例 (多項式解) $w_t = w_{xx} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$

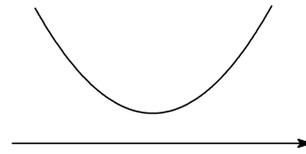
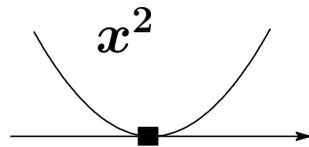
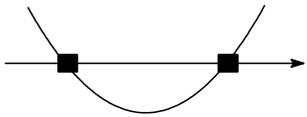
0 次: $w = 1$ 1 次: $w = x$ 2 次: $w = x^2 + 2t$

3 次: $w = x^3 + 6xt$ 4 次: $w = x^4 + 12x^2t + 12t^2$

$t < 0$

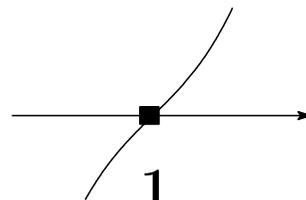
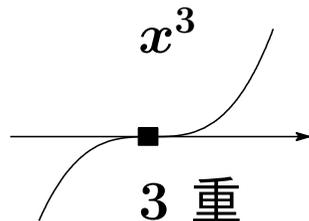
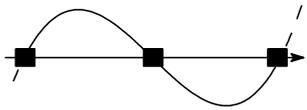
$t = 0$

$t > 0$



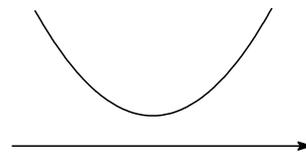
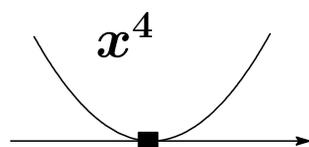
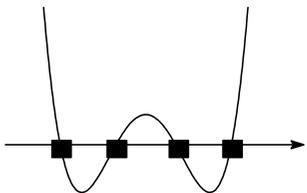
2 重

0



3 重

1



4 重

0

$(P_n)_t = (P_n)_{xx}$: n 次多項式解の形は？

$$P_n(x, t) = x^n + \square tx^{n-2} + \square t^2x^{n-4} + \dots +$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{-t}} \text{ とおくと}$$

$$P_n(\sqrt{-t}y, t) = (\sqrt{-t})^n(y^n - \square y^{n-2} + \square y^{n-4}) =: (\sqrt{-t})^n Q_n(y)$$

両辺を t で微分すると

$$(P_n)_t - \frac{y}{2\sqrt{-t}}(P_n)_x = -\frac{n}{2}(\sqrt{-t})^{n-2}Q_n$$

これに x 微分した式 $\sqrt{-t}(P_n)_x = (\sqrt{-t})^n Q'_n(y)$ と $-t(P_n)_{xx} = (\sqrt{-t})^n Q''_n(y)$

を代入すると

$$LQ_n := Q''_n - \frac{y}{2}Q'_n = -\frac{n}{2}Q_n \quad L = \frac{d^2}{dy^2} = \frac{y}{2} \frac{d}{dy}$$

よって Q_n は微分作用素 L の固有値 $-n/2$ に属する固有関数.

n 次のエルミート多項式

Q_n は微分作用素 L の固有値 $-n/2$ に属する固有関数.

$$LQ_n := Q_n'' - \frac{y}{2}Q_n' = -\frac{n}{2}Q_n$$

$$Q_0(y) = 1, \quad Q_1(y) = y, \quad Q_2(y) = y^2 - 2, \quad Q_3(y) = y^3 + 6y.$$

注意 4 ラプラシアン: 有界区間では固有展開は三角関数展開だが \mathbb{R} 上だと連続スペクトルが現れる. 作用素 L は関数空間

$$L_\rho^2 := \left\{ \psi \mid \int_{\mathbb{R}} \psi^2 \rho \, dx < \infty \right\}, \quad \rho(y) = e^{-\frac{|y|^2}{4}}$$

においてコンパクト自己共役作用素なのでスペクトルは固有値:

$$\lambda_n = -\frac{n}{2}, \quad (Q_n, Q_m)_{L_\rho^2} = \delta_{n,m}$$

完全系であること: 局所的には Weierstrass の多項式近似, 遠方では重みのおかげで影響がなくなるので全体を張ることができる.

注意 5 2 階常微分方程式の性質:

- (1) $Q_n(y)$ はちょうど n 個の零点をもち、それらはすべて単純零点である.
- (2) Q_{n+1} の $n + 1$ 個の零点を $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+1}$ とおくと区間 (y_i, y_{i+1}) ($i = 1, 2, \dots, n$) の中に $Q_n(y)$ の零点がちょうどひとつずつある.

証明の準備：変数変換によって $w_t = aw_{xx} + bw_x + cw$ は次の形に帰着させる.

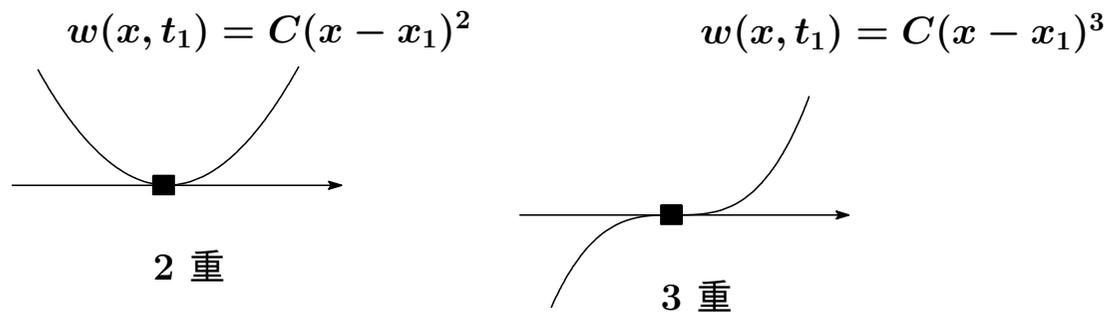
$$u_t = u_{xx} + q(x, t)u \quad (6)$$

$$\tilde{w}(\tilde{x}, t) = \alpha(\tilde{x}, t)w(x, t) \quad \tilde{x} = h(x, t)$$

適当に選ぶ **後で記入**

定理 1.6 の証明 (方法 1) — スツルムの方法 (一様収束の概念はまだない)

$w(x, t)$ は解析的と仮定する. 時刻 $t_1 \in (t_0, T)$ で多重零点 x_1 をもつとする.



点 (x_1, t_1) の近傍で u を t について展開.

$$u(x, t) = u_0(x) + (t - t_1)u_1(x) + (t - t_1)^2u_2(x) + \cdots$$

以下, 簡単のため $x_1 = t_1 = 0$ および $q \equiv 0$ と仮定する. 仮定より

$$u_0(x) = Cx^m + O(|x|^{m+1}) \quad (\exists C \neq 0).$$

以下，簡単のため $x_1 = t_1 = 0$ および $q \equiv 0$ と仮定する．仮定より

$$u_0(x) = Cx^m + O(|x|^{m+1}) \quad (\exists C \neq 0).$$

熱方程式 $u_t = u_{xx}$ に

$$u_t = u_1 + 2tu_2 + 3t^2u_3 + \cdots, \quad u_{xx} = (u_0)_{xx} + t(u_1)_{xx} + t^2(u_2)_{xx} + \cdots$$

を代入すると $\{u_n(x)\}$ に関する漸化式を得る：

$$u_1 = (u_0)_{xx}, \quad 2u_2 = (u_1)_{xx}, \quad 3u_3 = (u_2)_{xx}, \quad \cdots, \quad nu_n = (u_{n-1})_{xx}.$$

時空の原点 $(0, 0)$ で $u_t = u_{xx}$ を展開すると

$$u(x, t) = u_0(x) + tu_1(x) + t^2u_2(x) + \dots$$

$\{u_n(x)\}$ に関する漸化式

$$u_1 = (u_0)_{xx}, \quad 2u_2 = (u_1)_{xx}, \quad 3u_3 = (u_2)_{xx}, \quad \dots, \quad nu_n = (u_{n-1})_{xx}.$$

と $u_0(x) = Cx^m + O(|x|^{m+1})$ より

$$u_1 = O(|x|^{m-2}), \quad u_2 = O(|x|^{m-4}) \dots, \quad u_{[m/2]} = O(|x|^{m-2[m/2]}) - \text{Stop}.$$

したがって、初期値が $u_0(x) = Cx^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k x^k$ のとき

$$u(x, t) = CP_m(x) + \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k P_k(x, t).$$

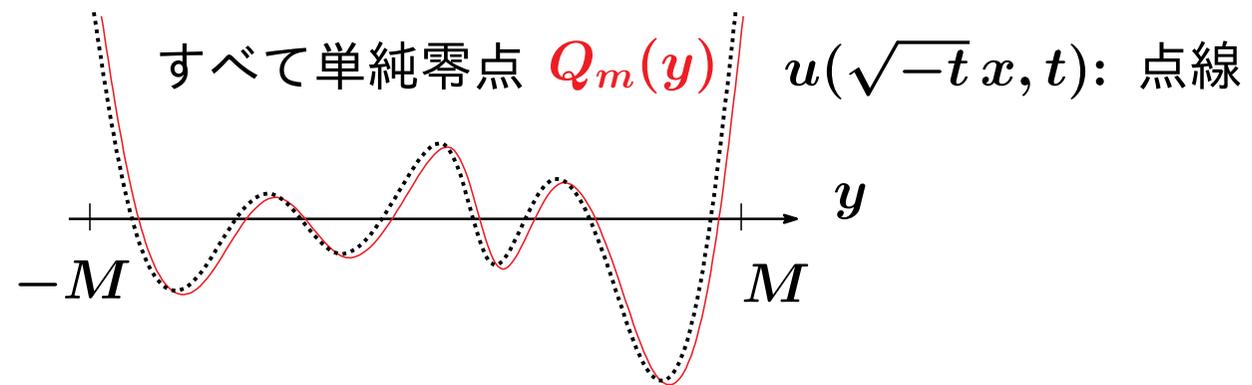
初期値が $u_0(x) = Cx^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k x^k$ のとき

$$u(x, t) = CP_m(x) + \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k P_k(x, t).$$

これより

$$\begin{aligned} u(\sqrt{-t}y, t) &= C(\sqrt{-t})^m Q_m(y) + O\left((\sqrt{-t})^{m+1}\right) \\ &= (\sqrt{-t})^m \left(CQ_m(y) + O(\sqrt{-t}) \right). \end{aligned}$$

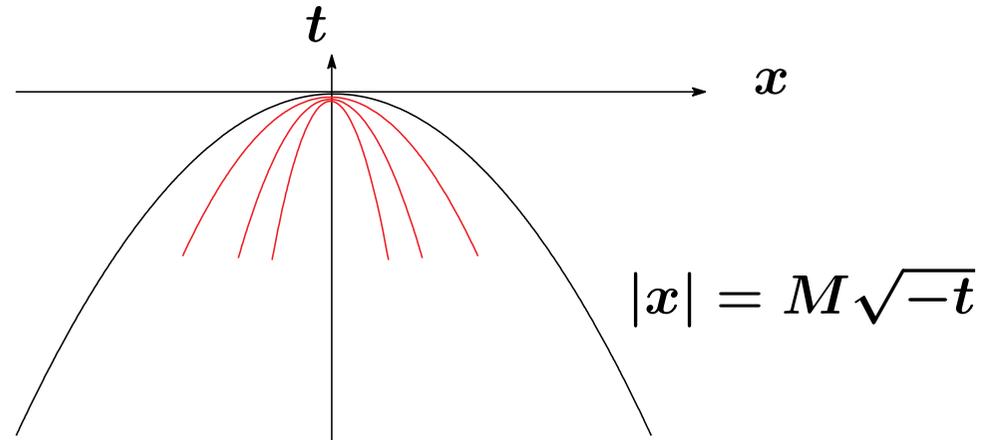
ここで $t \rightarrow -0$ の極限をとると $|y| \leq M$ において $O(\sqrt{-t}) \rightarrow 0$ in C^1



したがって $u(\sqrt{-t}y, t)$ は $|y| \leq M$ の範囲にちょうど m 個の零点をもつ.

$$|y| \leq M \iff |x| \leq M\sqrt{-t}$$

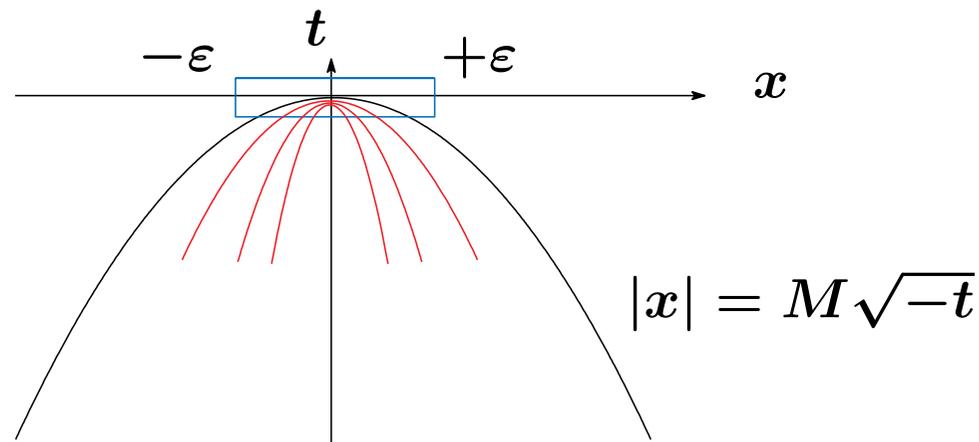
赤線は $u(x, t)$ の零点



以上の考察から $|x| \leq M\sqrt{-t}$ の範囲に $u(x, t)$ は m 個の零点をもちそれらが $t \rightarrow -0$ のときに $x-t$ 平面で放物線を描きながら $(0, 0)$ に近づくことが分かる。

いま $\varepsilon > 0$ を $|x| \leq \varepsilon$ の範囲に $u(x, 0)$ の零点が 0 のみであるように十分小さく
 とって固定. 解析性より $-\tau \leq t \leq \tau$ の範囲で $u(\pm\varepsilon, t) \neq 0$

$$|y| \leq M \iff |x| \leq M\sqrt{-t}$$



- $[-L, -\varepsilon], [\varepsilon, L]$ の区間には第一法則を適用
- $[-\varepsilon, \varepsilon]$ では $t = 0$ で少なくとも $m - 1$ 個の零点が消滅 (偶数 m 奇数 $m - 1$)
- $0 \leq t \leq \tau$ までは $[-\varepsilon, \varepsilon]$ で第一法則を適用

以上より $Z[u(\cdot, +0)] < Z[u(\cdot, -0)] \quad \forall t \in [0, \tau]$.

まとめ

$t = t_1$ で $u(x, t_1)$ が m 重零点をもてば $\exists \tau > 0$ s.t. $t \in [t_1 - \tau, t_1)$ の範囲で $u(x, t)$ は x_1 近傍に少なくとも m 個の相異なる零点をもち, それらは $t \rightarrow -0$ のとき x_1 に収束

証明 2 解の解析性を仮定しない.

時刻 $\exists t_1 \in (t_0, T)$ で $u(x, t_1)$ が退化 m 重の零点をもつ:

$$y = \frac{x - x_1}{\sqrt{t_1 - t}}, \quad s = \log \left(\frac{1}{t_1 - t} \right)$$

$$w(y, s) = u(x + e^{-s/2}y, t_1 - e^{-s})$$

後ろ向き自己相似変換:

$$\begin{aligned} w_s &= w_{yy} - \frac{y}{2}w_y + e^{-s}qw = Lw + e^{-s}qw \\ &= \frac{1}{\rho}(\rho w_y)_y + e^{-s}qw \quad \rho(y) = e^{-|y|^2/4} \end{aligned}$$

\mathbb{R} の上の問題に拡張して議論する. $L^2_\rho(\mathbb{R})$ での発展方程式

$$\frac{dw}{ds} = Lw + e^{-s}qw, \quad L = \frac{d^2}{dy^2} - \frac{y}{2} \frac{d}{dy}$$

$$L^2_\rho(\mathbb{R}) \text{ での発展方程式 } \frac{dw}{ds} = Lw + e^{-s}qw, \quad L = \frac{d^2}{dy^2} - \frac{y}{2} \frac{d}{dy}$$

半群を使って解くと

$$w(s) = e^{sL}w(0) + \int_0^s e^{(s-\sigma)L}e^{-\sigma}q(\sigma)w(\sigma) d\sigma$$

$-L$ の固有値 $\lambda_n = n/2$ (n の 1 次式, フーリエなら 2 次式) に対応する固有関数は $Q_n(y)$. これを L^2_ρ で正規化した関数は $H_n(y)$.

$$e^{sL}v = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n s} (v, H_n) H_n$$

考察 $q \equiv 0$ のとき

$(w(0), H_n) \neq 0$ が成り立つ最小の n を n_0 とおくと $\lambda_{n_0+1} = \lambda_{n_0} + 1/2$ より

$$w(s) = e^{sL}w(0) = e^{-\lambda_{n_0}s} (w(0), H_{n_0}) H_{n_0} + O(e^{-\lambda_{n_0+1}s}) \\ e^{-\lambda_{n_0}s} \left\{ (w(0), H_{n_0}) H_{n_0} + O(e^{-s/2}) \right\}$$

H_{n_0} は n_0 個の単純零点. あとは証明法 1 に同じ.

考察 1 $q \equiv 0$ のとき

$(w(0), H_n) \neq 0$ が成り立つ最小の n を n_0 とおくと $\lambda_{n+1} = \lambda_n + 1/2$ より

$$w(s) = e^{sL}w(0) = e^{-\lambda_{n_0}s}(w(0), H_{n_0})H_{n_0} + O(e^{-\lambda_{n+1}s})$$

$$e^{-\lambda_{n_0}s} \left\{ (w(0), H_{n_0})H_{n_0} + O(e^{-s/2}) \right\}$$

H_{n_0} は n_0 個の単純零点. あとの議論は証明法 1 に同じ.

(オイラーの伝統で級数展開で魔法のような公式群を発見).

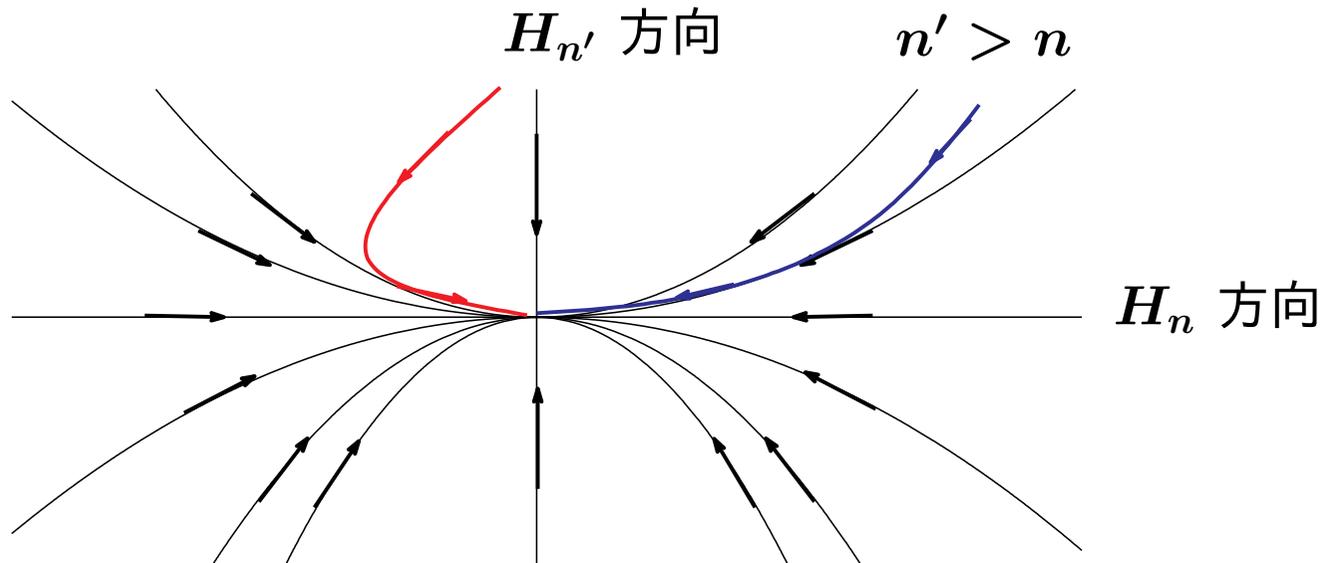
一般の場合 $\|q(s)\| \leq K$ のときは一般論よりある n_1 があって $t \rightarrow -0$ のとき

$$\frac{w(\cdot, s)}{\|w(\cdot, s)\|_{L^2_\rho}} \rightarrow \pm H_{n_1} \quad s \rightarrow \infty$$

が成り立つことを示す.

一般の場合 $\|q(s)\| \leq K$ のときは一般論よりある n_1 があって $t \rightarrow -0$ のとき

$$\frac{w(\cdot, s)}{\|w(\cdot, s)\|_{L^2_\rho}} \rightarrow \pm H_{n_1} \quad s \rightarrow \infty.$$



参考文献:

常微分の本 Coddington-Levinson 安定多様体 の一般論

Angenent 基礎理論 1988 の論文, Morse index への応用 1985 J.D.E.

Galaktionov の本

スツルムの第2定理の詳細な情報

$$w_t = a(x, t)w_{xx} + b(x, t)w_x + c(x, t)w$$

の解 $w \in C^\infty(D) \cap C(\bar{D})$ が $u(x, 0)$ が $x = 0$ で重複度 $m \geq 2$ の零点を持つ:

$$D_x^k u(0, 0) = 0 \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, m-1, \quad D_x^m u(0, 0) \neq 0.$$

このとき

$$Z[w(\cdot, -0)] - Z[w(\cdot, +0)] = \begin{cases} m, & m \text{ 偶数} \\ m-1, & m \text{ 奇数} \end{cases}$$

$w(x, 0) = Ax^m + O(|x|^{m+1})$ で $t \rightarrow -0$ のとき z に対して広義一様に

$$A^{-1}a_0^{-m/2}(-t)^{-m/2}w(x, t) \rightarrow H_m(z).$$

注) $t \rightarrow +0$ のとき前向き自己相似座標を導入して計算 (随伴作用素の固有関数).

注) 高次元でも球対称解 $u(r, t)$ ならば同様の議論が可能である.

フーリエ級数展開との関係

系 1.7 (第一法則の系) 係数 c_m, c_{m+1}, \dots, c_N を任意で与える (どれかは 0 でない, $1 \leq m < N$). このとき

$$m - 1 \leq Z \left[\sum_{k=m}^N c_k \sin kx \right] \leq N - 1 \quad x \in [0, \pi].$$

証明 $c_n, c_N \neq 0$ としてよい.

$$u_t = u_{xx} \quad (x \in [0, \pi]), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

の解

$$u(x, t) = \sum_{n=m}^N c_n e^{-k^2 t} \sin kx$$

を考える.

第一法則より $Z[u(\cdot, t)]$ は単調非増大

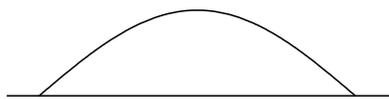
$$\exists \lim_{T \rightarrow \infty} Z[u(\cdot, T)] \leq Z[u(\cdot, t)] \leq \exists \lim_{T \rightarrow -\infty} Z[u(\cdot, T)]$$

ここで $T \gg 1$ のとき

$$u(x, T) = e^{-m^2 T} \left(c_m \sin mx + \sum_{k=m+1}^N c_k e^{-(k^2 - m^2)T} \sin kx \right) \approx c_m e^{-m^2 T} \sin mx$$

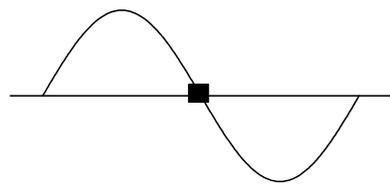
$$\Rightarrow Z[u(\cdot, T)] = m - 1.$$

$T \ll -1$ も同様である.



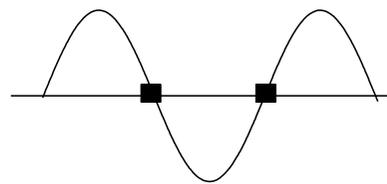
$$y = \sin x$$

$$Z[\sin x] = 0$$



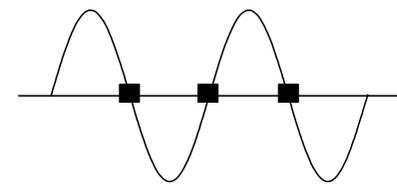
$$y = \sin 2x$$

$$Z[\sin 2x] = 1$$



$$y = \sin 3x$$

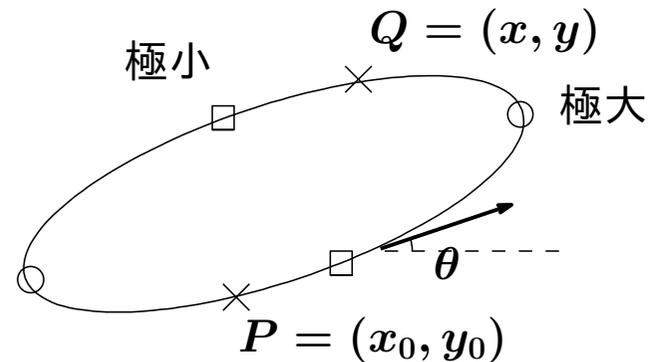
$$Z[\sin 3x] = 2$$



$$y = \sin 4x$$

$$Z[\sin 4x] = 3$$

系 1.8 どんな凸閉曲線に対しても曲率の停留点は 4 つある.



以下では狭義凸の場合を考える. k 曲率. 各点での接ベクトル $(\cos \theta, \sin \theta)$

$\theta : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ s は弧長パラメータ—この場合 γ の各点は θ で指定できる.

$k = \frac{d\theta}{ds}$ より

$$x - x_0 = \int_P^Q \cos \theta(s) ds = \int_{\theta(P)}^{\theta(Q)} \frac{\cos \theta}{k} d\theta,$$

$$y - y_0 = \int_P^Q \sin \theta(s) ds = \int_{\theta(P)}^{\theta(Q)} \frac{\sin \theta}{k} d\theta$$

$k = \frac{d\theta}{ds}$ より

$$x - x_0 = \int_P^Q \cos \theta(s) ds = \int_{\theta(P)}^{\theta(Q)} \frac{\cos \theta}{k} d\theta,$$
$$y - y_0 = \int_P^Q \sin \theta(s) ds = \int_{\theta(P)}^{\theta(Q)} \frac{\sin \theta}{k} d\theta$$

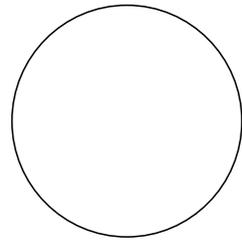
閉曲線ゆえに Q が γ の上を一周して P に戻ってくることが出来る。このとき

$$x(P) = x(Q), \quad y(P) = y(Q), \quad \theta(Q) = \theta(P) + 2\pi.$$

したがって

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{k} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{k} d\theta = 0$$

円周を $\mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z}$ と同一視する. Fourier の成分は



1		$z = 0$
$\sin \theta$	$\cos \theta$	$z = 2$
$\sin 2\theta$	$\cos 2\theta$	$z = 4$
$\sin 3\theta$	$\cos 3\theta$	$z = 6$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{k} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{k} d\theta = 0 \quad (7)$$

(7) より $1/k$ から $1/k$ の平均値を引くと

$$\frac{1}{k} - \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle \perp \{1, \cos \theta, \sin \theta\} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

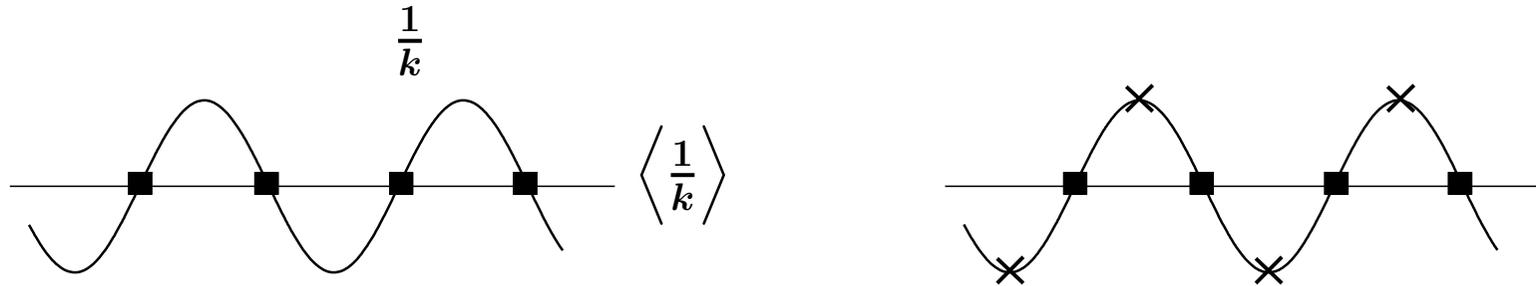
よって

$$\frac{1}{k} - \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle = \sum_{m=2}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta)$$

スツルム・フルヴィッツの定理より $Z \left[\frac{1}{k} - \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle \right] \geq 4.$

以上から

$$Z\left[\frac{1}{k} - \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle\right] \geq 4.$$



ロルの定理より2つの零点の間に停留点が少なくとも一つ存在する。 $k > 0$ より $1/k$ の停留点と k の停留点は一致する。よって k 自身が停留点を少なくとも4つもつ。

スツルム・フルヴィッツの公式の一般化

区間 $[0, L]$ 上で次の2階常微分方程式に対する固有値問題を考える.

$$\begin{cases} \{p'(x)\varphi'\}' + q(x)\varphi = -\lambda\varphi & (0 < x < L) \\ \text{Dirichlet, Neumann, Robin, Periodic B.C.} \end{cases} \quad (8)$$

注意 6 変数変換により $a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0$ が上の問題に帰着できる. $(L\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi)$. 一方, 周期境界条件のときは帰着不可能.

$u(x, t) = \sum_{k=n_0}^N c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x)$ は $u_t = \{p(x)u_x\}_x + q(x)u$ の解である. あとはフーリエ級数のときと同じ議論ができる.

命題 1.9 (Dirichlet, Neumann 境界条件のとき) (8) の固有値はすべて実数であり, すべて単純固有値

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \rightarrow \infty.$$

対応する固有関数を $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ とおくと以下が成り立つ,

- $Z(\varphi_m) = m - 1$ (端は数えない)
- φ_{k+1} の隣り合う零点の間に φ_k の零点がちょうど 1 つある.
- 関数系 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ に対しスツルム・フルビッツの定理が成立.

$$Z[\varphi_{n_0}] \leq Z\left[\sum_{k=n_0}^N c_k \varphi_k\right] \leq Z[\varphi_N]$$

注意 7 周期境界条件の場合固有値の重複度は高々 2 であり

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \cdots \rightarrow \infty, \quad Z[\varphi_1] = 0, \quad Z[\varphi_{2k}] = Z[\varphi_{2k+1}] = 2k.$$

非線形問題に対する交点数非増大

$$u_t = a(x, u, u_x)u_{xx} + f(x, u, u_x) \quad \text{準線形}$$

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}) \quad \text{完全非線形}$$

例 半線形 $u_t = u_{xx} + f(u)$ 曲線短縮流 $u_t = u_{xx}/(1 + u_x^2)$.

命題 1.10 (比較原理) u, \tilde{u} を2つの初期値 u_0, \tilde{u}_0 に対する解とすると

$$u_0(x) \leq \tilde{u}_0(x) \Rightarrow u(x, t) \leq \tilde{u}(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0.$$

例 半線形 $u_t = u_{xx} + f(u)$ 曲線短縮流 $u_t = u_{xx}/(1 + u_x^2)$.

$$u_t = a(x, u, u_x)u_{xx} + f(x, u, u_x) \quad \text{準線形}$$

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}) \quad \text{完全非線形}$$

命題 1.11 (強比較原理) u, \tilde{u} を2つの初期値 u_0, \tilde{u}_0 に対する解とする.

$$u_0(x) \leq \tilde{u}_0(x), u_0 \not\equiv \tilde{u}_0 \Rightarrow u(x, t) < \tilde{u}(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0.$$

注意 8 証明は差をとって線形の場合に帰着させる. $n = 1$ の場合は各々スツルム
ムの第 1-2 法則からしたがう.

交点数非増大定理

解の交点数 任意の2つの解 u_1 のグラフと u_2 のグラフの交点数 $= Z[u_1 - u_2]$

半線形 $u_t = u_{xx} + f(u)$ の場合

$w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ とおくと

$$w_t = w_{xx} + f(u_1) - f(u_2) = w_{xx} + c(x, t)w$$

ここで

$$c(x, t) = \begin{cases} \frac{f(u_1(x, t)) - f(u_2(x, t))}{u_1(x, t) - u_2(x, t)}, & u_1 \neq u_2 \\ f'(u(x, t)), & u_1 = u_2. \end{cases}$$

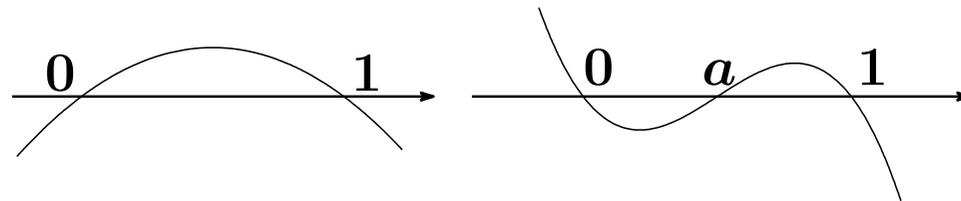
スツルムの第一定理より解の交点数は t に関して単調非増大である。

2 Part II – 進行波問題への応用

$$u_t = u_{xx} + f(u) \quad f(0) = f(1) = 0 \quad (9)$$

(i) 単安定 $f'(0) > 0$, $f(s) \leq f'(0)s$, $f(s) > 0$ ($0 < s < 1$) K.P.P 型

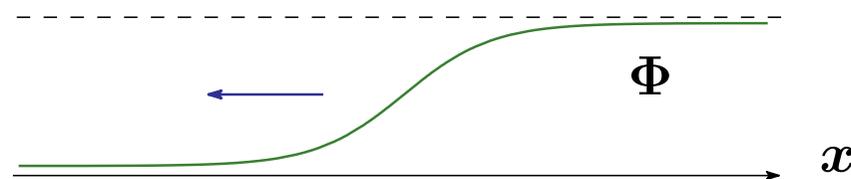
(ii) 双安定 $f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$



事実：

単安定 $u_0(x) = H(x)$ のとき最小速度の進行波に形状が収束 (KPP, 1937)

双安定進行波の存在, $u_0(x) = H(x)$ のとき形状の収束



定理 2.1 (f 双安定のとき) $\bar{u}(x, t)$ は初期値

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

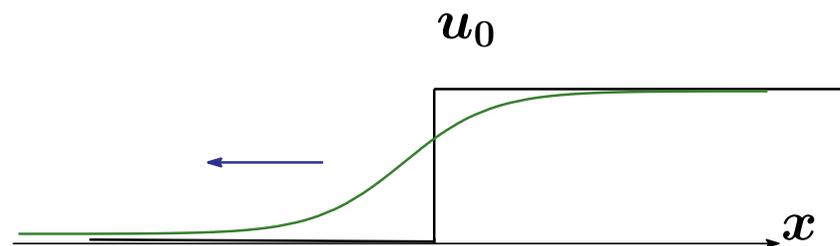
に対する (9) の解とする. このとき $t \rightarrow \infty$ のとき $a(t) = o(t)$ が存在して

$$\bar{u}(x + c(t - a(t)), t) \rightarrow \Phi(x) \quad (t \rightarrow \infty).$$

と各点収束する (実は一様). ここで $\Phi(x)$ はある $c \in \mathbb{R}$ に対して次を満たす関数:

$$\Phi'' + c\Phi' + f(\Phi) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\Phi(+\infty) = 1, \quad \Phi(-\infty) = 0.$$



注意 9 f がより多くの零点を $x = 0, x = 1$ の間に持つ場合も結論は成立する.
ただし $\Phi(\infty) > \Phi(-\infty)$ および $f(\Phi(-\infty)) = f(\Phi(\infty))$ が成立.

注意 10 $\Phi(x - ct)$ は (9) の進行波解である. 双安定の場合は (Φ, c) の組は一
意である (平行移動を除く).

放物型ワード (Ducrot-Giletti-Matano)

ワード A, B が $+$ と $-$ で構成されるワード

$A \triangleright B \iff B$ が A のサブワード.

例 $B = [+], [-], [] \implies [+]\triangleright B$ だが $[-]\triangleright [+]$ ではない.

放物型方程式の交点に関して以下のことが成り立つ.

関数 $w(x)$ に対して $Z[w(\cdot)] < \infty$ のとき $SGN[w(\cdot)]$ は $+$ と $-$ の語の集まりとする. 点列 $x_1 < \dots < x_{k+1}$ に対応する $w(x_1), \dots, w(x_{k+1})$ は隣り合う値が符号変化しており $Z[w] = k$ が達成されている. このとき $t' > t$ ならば $SGN[w(t)] \triangleright SGN[w(t')]$ が成り立つ.

例外的なルール: $w \equiv 0$ のときは語は空集合のように記述する ($SGN[0] = []$).

[Giletti-Ducrot-Matano] Lemma 2.3

Step 1

$$(i) \quad 0 < \bar{u} < 1 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$(ii) \quad \bar{u}_x > 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

証明

(i) $u = 0, 1$ は定常解なので強比較原理からしたがう.

$$(ii) \quad H(x+a) = \bar{u}(x+a, 0) \geq \bar{u}(x, 0) = H(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$\bar{u}(x+a, t), \bar{u}(x, t)$ は同じ方程式の解 (方程式の係数に x 依存性がない).

$$\Rightarrow \text{比較原理より } \bar{u}(x+a, t) \geq \bar{u}(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad a \geq 0.$$

$$\Rightarrow \bar{u}_x(x, t) \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

一方 $w = u_x$ は $w_t = w_{xx} + f'(u)w$ を満たす.

強最大値原理より $w > 0 \iff u_x > 0$.

Step 1

$$(i) \quad 0 < \bar{u} < 1 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$(ii) \quad \bar{u}_x > 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

$$(iii) \quad \forall t > 0 \text{ に対して } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{u}(x, t) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{u}(x, t) = 0. \end{cases}$$

$$(iv) \quad Z[\bar{u}(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot + a, t + \tau)] \leq 1, \quad \forall t > 0, \forall \tau > 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

証明方針 (iii)

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \text{ に対して}$$

$$\bar{u}(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t) H(y) dy + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} G(x - y, t - s) f(\bar{u}(y, s)) dy \right) ds$$

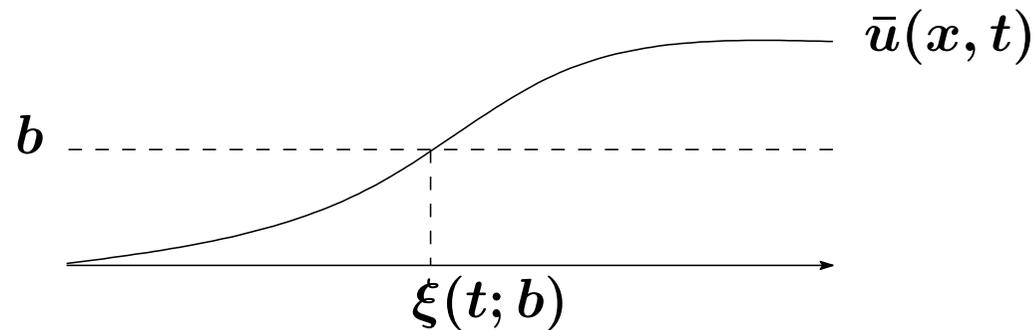
t を固定して $x \rightarrow \infty$ にすれば 第一項 ≈ 1 . 残りの項を適当に評価する.

証明 (iv) スツルムの第 1 定理を $Z[H - \bar{u}(\cdot + a, \tau)] = 1$ に用いればよい.

帰結

$b \in (0, 1)$ を固定. (i),(ii),(iii) より

$\bar{u}(x, t) = b$ を満たす点 $x = \xi(t; b)$ が各 $t > 0$ ごとに一意に存在する.

記号定義

$\exists h(b, t) : b \in (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ s.t.

$$\bar{u}_x(x, t) = h(\bar{u}(x, t), t) = \bar{u}_x(\xi(t; \bar{u}(x, t)), t)$$

u_{xx} : 一様有界 u_{xxx} : 一様有界 $\Rightarrow |u_{xx}| \leq C|u_x|$ ($x \in \mathbb{R}, t > 0$)

関数列は相対コンパクト \Rightarrow 極限が部分列の取り方に依存しないことを示す.

Step 2 関数列が相対コンパクト \Rightarrow 極限が部分列の取り方に依存しないこと.

t をパラメータとする \mathbb{R} 上の関数族

$$g(x, t) := \bar{u}(x + \xi(t; b), t)$$

が収束するような二つの時間列 t_n, s_n を任意に選び, 極限をそれぞれ $g_1(x), g_2(x)$

とおく. $t_n < s_n < t_{n+1} < \dots$ として一般性を失わない.

$$SGN[g(\cdot, s_n) - g(\cdot, t_n)] = [-, +], \quad SGN[g(\cdot, s_n) - g(\cdot, t_{n+1})] = [+,-].$$

ここで $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$SGN[g_2 - g_1] \triangleleft [-, +], \quad SGN[g_2 - g_1] \triangleleft [+,-].$$

よって $SGN[g_2 - g_1] = [-], [+], []$ のいずれか

(\mathbb{R} 上で $g_2 - g_1 < 0, g_2 - g_1 > 0, g_2 \equiv g_1$ のいずれか).

一方 $g_2(0) = g_1(0) = b$ なので $g_2 \equiv g_1$.

Step 3

$\bar{u}(x, t)$ の ω 極限点のひとつを $w(x, t)$ とする. $\exists \alpha_n, \tau_n$ s.t. $\tau_n \rightarrow \infty$

$$\bar{u}(x + \alpha_n, t + \tau_n) \rightarrow w(x, t) \quad \text{広義一様かつ } C_{loc}^2$$

したがって

$$\bar{u}_x(x + \alpha_n, t + \tau_n) = h(\bar{u}(x + \alpha_n, t + \tau_n), t + \tau_n) \searrow w_x(x, t) = h_*(w(x, t))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{xx} &= h'_*(w)w_x = h'_*(w)h^*(w) \\ w_{xt} &= h'_*(w)w_t = h'_*(w)(w_{xx} + f(w)) \end{cases}$$

これを

$$w_{xt} = (w_{xx} + f(w))_x = w_{xxx} + f'(w)w_x$$

に代入して

$$h'_*(h'_*h_* + f(w)) = (h'_*)^2h_* + h''_*(h_*)^2 + f'(w)h_*$$

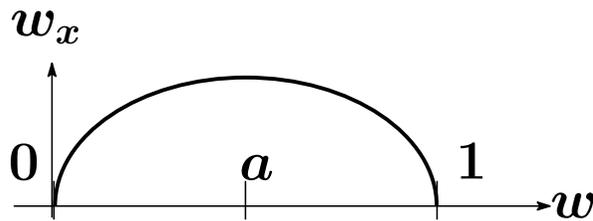
$$h''_*(h_*)^2 + f'(w)h_* - h'_*f(w) = 0 \iff h''_* + \left(\frac{f(w)}{h}\right)' = 0$$

よりある定数 C があって

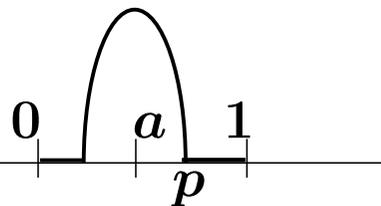
$$h'_* + \frac{f(w)}{h} = C \quad h_*h'_* + f(w) = Ch.$$

ここで $h_*(w(x, t)) = w_x(x, t)$ より $w_{xx} + f(w) = Cw_x$.

結論: h のグラフは下図のようになる.



もし右図のようになったとする.



ある点 $p \in (0, a) \cup (a, 1)$ で $h'(p) = h(p) = 0$ とすると $f(w(p)) = 0$ となるので矛盾.

3 Part III – 爆発問題への応用

初期境界値問題:

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ただし Ω は有界領域または $\Omega = \mathbb{R}^N$ かつ $p > 1$.

問 1 爆発が起きるのか否か？

問 2 どこで爆発するのか？

問 3 爆発点近傍の漸近挙動は？

問 4 爆発点後の解の挙動は？

用語の定義—時間大域解・爆発解・爆発点

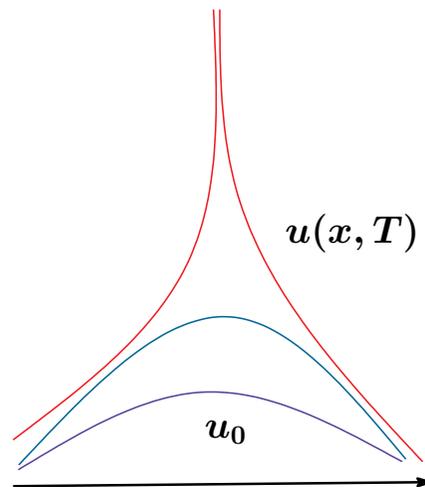
定義 1 (時間大域解, 爆発, 爆発時刻)

- (1) 解が時間無限まで存在する u : 時間大域解 (global solution).
- (2) u が時間大域的でないとき, $\exists T = T(u_0) \in (0, \infty)$ があって

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty.$$

定義 2 (爆発集合, 爆発点)

$$B(u_0) = \left\{ a \in \overline{\Omega} \mid \exists x_m \rightarrow a, \exists t_m \nearrow T \text{ s.t. } |u(x_m, t_m)| \rightarrow \infty \right\}.$$

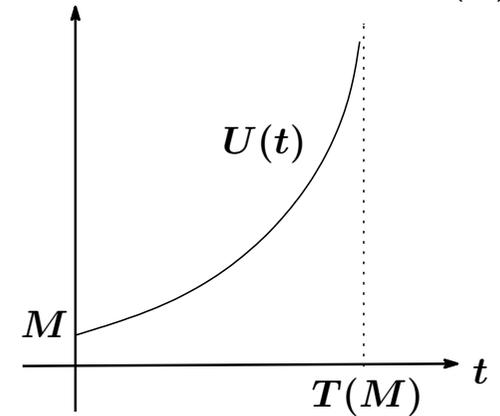


常微分方程式 (Neumann B.C. or $\Omega = \mathbb{R}^N$)

$$\frac{dU}{dt} = U^p, \quad U(0) = M > 0,$$

の解は

$$U(t) = \kappa \{T(M) - t\}^{-\frac{1}{p-1}}, \quad \kappa = (p-1)^{-1/(p-1)}$$



変数分離より爆発時刻 $T(M)$ に対して

$$\frac{U^{-(p-1)}}{p-1} = \int_{U(t)}^{\infty} \frac{dU}{U^p} = T(M) - t \iff U(t) = \kappa \{T(M) - t\}^{-\frac{1}{p-1}}.$$

爆発集合 $B(u_0) = \bar{\Omega}$.

爆発が起きる十分条件

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Q 解は爆発するのか時間大域解なのか？

- (1) 固有関数を使う方法 — Kaplan の方法 ($u_0 \geq 0$).
- (2) エネルギー汎関数を使う方法.
- (3) 比較原理を使う方法.

Kaplan の方法

Kaplan の議論 (Ω : 有界 $u_0 \geq 0$)

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$\lambda_1 > 0$ は Dirichlet 条件付き $-\Delta$ の第 1 固有値とし, $\varphi_1 \in C^2(\bar{\Omega})$ は対応する正值固有関数:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 + \lambda_1\varphi_1 = 0, & x \in \Omega, \\ \varphi_1 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (10)$$

ただし $\|\varphi_1\|_{L^1(\Omega)} = 1$.

補題 3.1 $u_0 \geq 0, \quad \int_{\Omega} u_0 \varphi_1 dx > \lambda_1^{\frac{1}{p-1}} \implies$ 解 u は有限時間内に爆発.

補題 3.2 $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は単調増大な凸関数であり $\int_{y(t_0)}^{\infty} \frac{dy}{h(y)} < \infty$.

$$\frac{dy}{dt} \geq h(y), \quad \forall t \geq t_0.$$

さらに $h(y(t_0)) > 0$ なら $y(t)$ は有限時間で発散.

証明 関数 $h(y)$ の単調性と $h(y(t_0)) > 0$ より $y(t_0) > y^*$. ただし $y^* > 0$ は $h(y)$ の零点.

$\int_{y(t_0)}^{\infty} \frac{dy}{h(y)} < \infty$ なので $y(t)$ が有限時間で発散.

証明 解 u が時間大域的に存在するとして矛盾を導く. 最大値原理より任意の $t > 0$ で $u \geq 0$.

(P) の両辺に φ_1 をかけて Ω 上積分すると

$$\int_{\Omega} u_t \varphi_1 dx = \int_{\Omega} \Delta u \varphi_1 dx + \int_{\Omega} u^p \varphi_1 dx. \quad (11)$$

ところで, $u|_{\partial\Omega} = 0 = \varphi_1|_{\partial\Omega}$ と (10) より

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi_1 dx = \int_{\Omega} u \Delta \varphi_1 dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \varphi_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} u \right) dS_x = -\lambda_1 \int_{\Omega} u \varphi_1 dx.$$

これと (11) より φ_1 の正規化条件より, $\varphi_1 dx$ を測度と考えると Jensen の不等式を適用すれば

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \varphi_1 dx = -\lambda_1 \int_{\Omega} u \varphi_1 dx + \int_{\Omega} u^p \varphi_1 dx \geq -\lambda_1 \int_{\Omega} u \varphi_1 dx + \left(\int_{\Omega} u \varphi_1 dx \right)^p.$$

背理法の仮定と領域 Ω の有界性より関数 $y(t) := \int_{\Omega} u \varphi_1 dx$ は時間大域的に存在. 上の議論から

$$\frac{dy}{dt} \geq y^p - \lambda_1 y = h(y(t)).$$

定理の仮定より $y^p(0) - \lambda_1 y(0) > 0$. よって関数 $y(t)$ は有限時間で発散. これは解 u が時間大域的に存在するという仮定に反する.

(P) の時間大域解: 第 1 固有関数 $\varphi_1(x)$ に対して $\varphi_1/\|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} = \psi$ とおいて $V(x, t) := \varepsilon\psi(x)$

を考える. すると, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega, t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varepsilon\psi(x) \end{cases}$$

の解 $u(x, t; \varepsilon\psi(x))$ は時間大域的に存在する. 実際, $\psi(x) \leq 1$ であるから $0 < \varepsilon \ll 1$ ならば

$$V_t - \Delta V - V^p \geq (\lambda_1 - \varepsilon^p)\psi(x) > 0$$

が成り立つ. よって比較原理より

$$u(x, t; \varepsilon\psi(x)) \leq V(x).$$

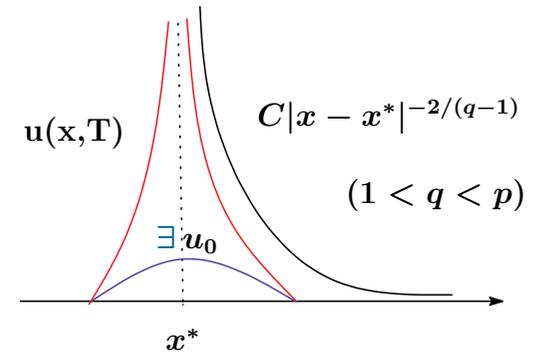
注 十分小さな $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対して適当な $\delta \in (0, \lambda_1)$ を選べば $\bar{V}(x, t) := \varepsilon e^{-\delta t}\psi(x)$ が同じ

方程式の優解であることも容易に示される. よって, $u \equiv 0$ は安定な平衡点.

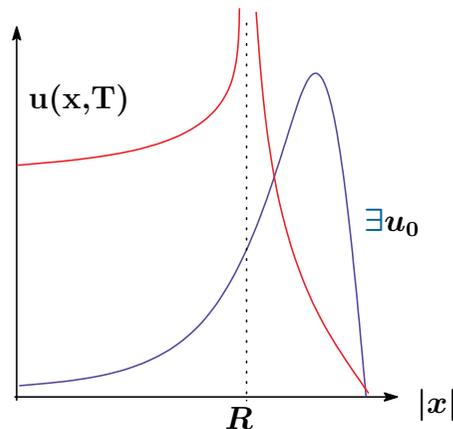
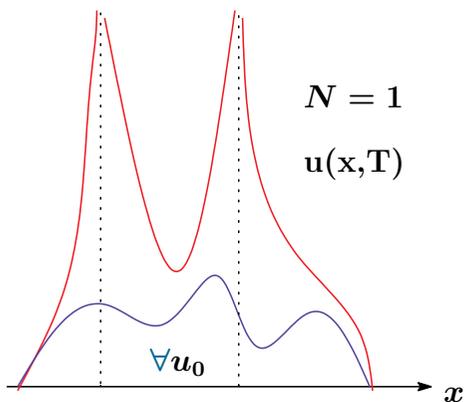
いくつかの既知の結果

Q どこで爆発するのか？

1980 どこで爆発？	Weissler (83)	$N = 1$, \exists 原点でのみで爆発する解.
	Friedman-McLeod (85)	N -dim. \exists 原点でのみで爆発する解. 爆発点はコンパクト (Ω convex)
	Chen-Matano (89)	$N = 1$, $B(u_0)$ は有限個の点
	Giga-Kohn (89)	球面上で爆発する解



Friedman-McLeod '85



Q どのように爆発するのか？

自己相似解

$$u_s(x, t) = (T - t)^{-\frac{1}{p-1}} \psi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right)$$

ここで ψ は以下の方程式の解 (自己相似解のプロファイル)

$$\Delta\psi - \frac{y}{2} \cdot \nabla\psi - \frac{1}{p-1}\psi + |\psi|^{p-1}\psi = 0.$$

Giga-Kohn (85): $p \leq (N+2)/(N-2) \Rightarrow \psi = \pm\kappa, 0$ (only trivial sol.)

Lepin (88,90): $(N+2)/(N-2) < p < \exists p_L \Rightarrow$ 非自明な古典解 $\exists\psi$.

注 Lepin の解は原点のみで爆発する.

$\limsup_{t \rightarrow T} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ (Type I) \Rightarrow 局所的に自己相似解に漸近.

自己相似解の重要性

$\forall a \in \mathbb{R}^N, \forall T_1 > 0$ に対して次の変数変換を考える:

$$w_{a,T_1}(y, \tau) := (T_1 - t)^{\frac{1}{p-1}} u(x, t),$$

$$y := \frac{x - a}{\sqrt{T - t}}, \quad \tau := -\log(T - t), \quad \tau \geq \tau_0 := -\log T.$$

関数 w_{a,T_1} は次の偏微分方程式を満たす.

$$(W) \quad w_\tau = \Delta w - \frac{1}{2} y \cdot \nabla w - \frac{1}{p-1} w + |w|^{p-1} w, \quad y \in \mathbb{R}^N, \quad \tau \in (\tau_0, \infty).$$

もし Type I ならば $\tau_k \rightarrow \infty$ のとき (適当な部分列に対し)

$$w_k(y, \tau) := w(y, \tau + \tau_k) \rightarrow \text{全域解 } \hat{w}(\tau), \quad \tau \in (-\infty, +\infty).$$

爆発解の特異点を調べるには有界な全域解を分類すればよい.

$p < p_s$: Giga-Kohn (87) と Merle-Zaag (98) で非負有界な全域解は完全分類.

$$\hat{w} = 0, \quad \kappa := (p-1)^{-\frac{1}{p-1}} \quad \text{または} \quad \kappa(1 + e^{\tau - \tau_0})^{-\frac{1}{p-1}}$$

$\limsup_{t \rightarrow T} (T - t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ (Type I) \implies 自己相似解に漸近.

(1) **Giga-Kohn (85,87,89)**

$1 < p < (N + 2)/(N - 2) =: p_S \implies \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \sim \kappa (T - t)^{-\frac{1}{p-1}}$.

エネルギー汎関数:

$$E(w) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 + \frac{1}{2(p-1)} |w|^2 - \frac{1}{p+1} |w|^{p+1} \right) \rho(y) dy$$

ここで $\rho(y) = (4\pi)^{-N/2} e^{-|y|^2/4}$.

汎関数 $E(w(\tau))$ はリャプノフ関数.

$$\begin{aligned} \frac{dE(w(\tau))}{d\tau} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla w \cdot \nabla w_\tau - w^p w_\tau + \frac{1}{p-1} w w_\tau \right) \rho dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ -\nabla \cdot (\rho \nabla w) - \rho w^p - \frac{\rho}{p-1} w \right\} w_\tau dy = - \int_{\mathbb{R}^N} w_\tau^2 \rho dy. \end{aligned}$$

$w(\pm\infty) = 0, \kappa$ すなわち $\{(w(+\infty), w(-\infty))\} = \{(0, 0), (\kappa, \kappa), (\kappa, 0)\}$.

連結性より $(\kappa, 0)$ は不可能. さらに爆発するのは (κ, κ) のみ! $\implies w(\tau) \rightarrow \kappa$.

$\limsup_{t \rightarrow T} (T - t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ (Type I) \implies 自己相似解に漸近.

(1) **Giga-Kohn (85,87,89), Giga-Matsui-Sasayama (04)**

$1 < p < (N + 2)/(N - 2) =: p_S \implies \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \sim \kappa(T - t)^{-\frac{1}{p-1}}.$

(2) **Matano-Merle (04,08)**

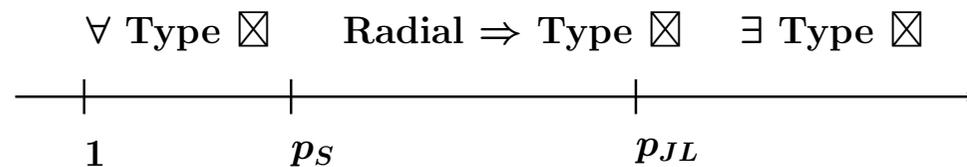
$p_S < p < p_{JL} \implies \forall$ 球対称解は Type I 爆発

(3) **Herrero-Velazquez (94), Mizoguchi (04), Matano-Merle (08) e.t.c.**

$N \geq 11, p > \exists p_{JL} \implies \exists$ 球対称解で $\limsup_{t \rightarrow T} (T - t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$ (Type II).

(4) **Fillipas-Herrero-Velazquez (00)**

$p = p_S \implies \exists$ 符号変化する Type II の球対称爆発解.



注意 11 上からの評価が非自明である

$$\text{下からの評価} \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \kappa(T - t)^{-\frac{1}{p-1}}$$

証明 $g_\tau(t) = \kappa(\tau - t)^{-\frac{1}{p-1}}$ という O.D.E. の解の族を考える. この空間一様な解は $\tau > 0$ に関して単調減少である.

$T = T(u_0)$ のとき $t \in (0, T)$ に対して $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq g_T(t)$ を示せば良い.

$g_T(t_0) > \|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}$ と仮定するとある $\varepsilon > 0$ があって $g_{T+\varepsilon}(t_0) > \|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}$

最大値原理より

$$\infty > g_{T+\varepsilon}(T) = g_{T+\varepsilon}(T - t_0 + t_0) > \|u(T - t_0 + t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u(T)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

これは矛盾.

3.1 時間大域解の有界性

(G1) 任意の大域解は $t \in (0, \infty)$ で一様に有界. — (1)(2)(3)

(G2) 解が大域的に存在するが $t \rightarrow \infty$ のとき最大値が発散.

(1) Quittner(99), Giga (89)

$1 < p < p_s \implies$ 任意の時間大域的 u に対し $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)})$

(2) Mizoguchi(05), Chen-Fila-Guo (06)

$p > p_s, \Omega = B_R, \forall u$ 球対称正值時間大域解は一様有界 — これだけ説明

(3) Matano-Merle (04,09再)

$p > p_s, \Omega = B_R$ で u_0 が正と限らない球対称関数の場合まで (2) を一般化.

(4) Galaktionov-Vazquez (97)

$p = p_s$ なら $\Omega = B_R$ 上の球対称正值解で (G2) が起こり得る.

補題 3.3 (Chen-Poláčik (96)) 滑らかな球対称関数 $v(x, t) = V(r, t) \not\equiv 0$:

$$v_t = \Delta v + a(|x|, t)v, \quad x \in B_R(0), \quad t_1 < t < t_2$$

$$v \neq 0, \quad x \in \partial B_R(0), \quad t_1 < t < t_2$$

を満たす. ただし, $a(|x|, t)$ は $B_R(0) \times (t_1, t_2)$ において連続. このとき

(i) $V(\cdot, t)$ の区間 $[0, R]$ の零点数 $Z(V(\cdot, t))$ は区間 (t_1, t_2) 内において有限.

(ii) $t \mapsto Z(V(\cdot, t))$ は単調非増大.

(iii) ある r^*, t^* に対し $V_r(r^*, t^*) = V(r^*, t^*) = 0$ が成り立つならば

$$Z(V(\cdot, t)) > Z(V(\cdot, s)), \quad (t_1 < t < t^* < s < t_2).$$

系 方程式 (P) の球対称な 2 つの解の交点数は単調減少で接したとき真に減少.

Lepin の自己相似解 $p_s < p < p_L := \begin{cases} \infty, & N \leq 10, \\ 1 + \frac{6}{N-10}, & N \geq 11. \end{cases}$

初期値問題

$$\begin{cases} U_t = U_{rr} + \frac{N-1}{r}U_r + U^p, & r > 0, 0 < t < T, \\ U(r, T) = mr^{-\frac{2}{p-1}}, & 0 < m < k \end{cases}$$

は 後ろ向き自己相似解 (backward self-similar solution) $u_b = U_b$ を持つ

$$\begin{aligned} \psi'' + \left(\frac{N-1}{y} - \frac{y}{2} \right) \psi' + \psi^p - \frac{1}{p-1} \psi &= 0, \quad y > 0, \\ \psi'(0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} y^{\frac{2}{p-1}} \psi(y) &= \exists m \in (0, c^*) \end{aligned}$$

の解 $\psi > 0$ によって,

$$U_b(r, t) = (T - t)^{-\frac{1}{p-1}} g \left(\frac{r}{\sqrt{T-t}} \right), \quad \forall T \in \mathbb{R}.$$

特異定常解

$$\Phi^*(r) = c^* r^{-\frac{2}{p-1}}, \quad (c^*)^{p-1} = \frac{2}{p-1} \left(N - 2 - \frac{2}{p-1} \right)$$

とおく. 単純な計算によって, 関数 Φ^* が

$$U_{rr} + \frac{N-1}{r} U_r + U^p = 0 \quad r > 0$$

を満たすことが確かめられる (ただし $p > N/(N-2)$ $N \geq 3$).

定常解の構造

$1 < p < p_s$ のとき有界領域において正值定常解がある (変分法).

$p > p_s$ のときは正值解がない (Pohozaev の不等式).

定理 3.1 (Matano-Merle) $\Omega = B_R$. $p > p_s$ なら球対称大域解は一様有界

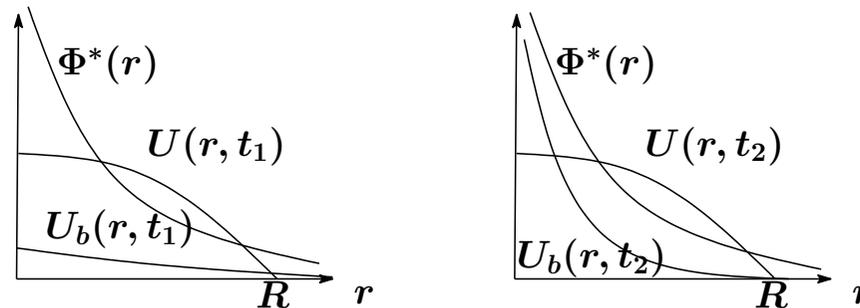
$p \in (p_s, p_L)$ かつ $\Omega = B_R$ 球対称正值の場合を考える:

Case 1: ある $t_0 \in (0, \infty)$ に対して $Z(U(\cdot, t_0) - \Phi^*(\cdot)) = 0, 1$

零点数と比較原理より U は一様有界. また $p > p_s$ ならば定常解は 0 のみ. よって $U \rightarrow 0$ $t \rightarrow \infty$.

Case 2: 任意の $t > 0$ に対して $Z(U(\cdot, t) - \Phi^*(\cdot)) \geq 2$

$T \gg 1$ を適当に選べば Φ^* , $U(t)$ と $U_b(t)$ は下図のようになる.



時刻 $t_1 \approx 0, t_2 \approx T$ に対するグラフから零点数が増大して矛盾.

3.2 爆発後の解の延長可能性

定義 3 (時刻 T^* までの極限 L^1 解: \tilde{u})

関数列 $\{\tilde{u}_{0,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset C(\Omega)$ は

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_{0,n} = u_0 \quad \text{in } C(\bar{\Omega}).$$

を満たし, これらを初期値にもつ初期境界値問題 (P) の古典解 $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は少なくとも $0 \leq t < T^*$ の範囲で存在するとする. さらに.

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_n(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} = 0, \quad \forall t \in [0, T^*)$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\tilde{u}_n)(\cdot, t) - f(\tilde{u})(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega \times (0, t))} = 0, \quad \forall t \in [0, T^*).$$

上のような T^* の上限を $T^c(u_0)$ とおく.

(1) $T = T^c$ 完全爆発 (complete blow-up)

(2) $T < T^c$ 不完全爆発 (incomplete blow-up)

□ Q 爆発後の解の延長？

ケース 1: 爆発後は弱解としても延長不可能 : **完全爆発 (Complete blow-up)**.

(1) **Baras-Cohen (87)**

$1 < p < (N + 2)/(N - 2) =: p_S$ Ω 有界 $\Rightarrow \forall$ 正值解は完全爆発.

(2) **Galaktionov-Vazquez (97)**

球対称正值 $\Omega = \mathbb{R}^N$: $p = p_S$ or $x = 0$ が爆発点でない \Rightarrow 完全爆発.

アイデア : 無限の速度で伝播する進行波型の劣解を構成して、交点数の議論を使う。

ケース 2: 爆発後も弱解として延長可能 : 不完全爆発 (Incomplete blow-up)

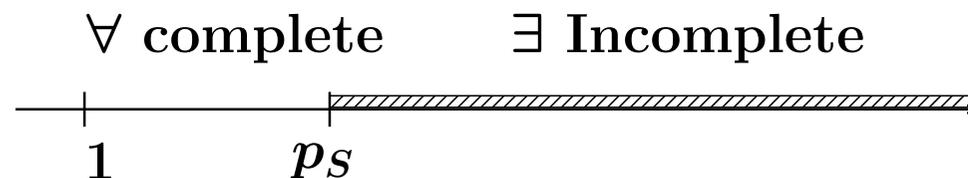
(1) Galaktionov-Vazquez (97), Mizoguchi(05)

(2) Chou-Du-Zheng (07) $p > (N + 2)/(N - 2)$, Ω が有界凸領域 :

爆発解全体と時間大域解の境目 (閾値解) は不完全爆発解.

(3) Matano-Merle (09) $p > (N + 2)/(N - 2)$, $\Omega = B_R$ または \mathbb{R}^N :

球対称閾値解は不完全爆発. 爆発後の弱解は瞬時に正則化 (Fila-Matano-Polacík(06)).



Radial and $B(u_0) \setminus \{0\} \neq \emptyset \Rightarrow$ complete ($p > 1$)

初期値 $u_0 \geq 0$ に対する (P) の解を $u(x, t; u_0)$ と書く.

$$A := \{u_0 \in L^\infty(\Omega); u_0 \geq 0 \text{ かつ } u(x, t; u_0) \text{ は一様有界で } \lim_{t \rightarrow \infty} u(\cdot, t; u_0) = 0\}$$

定理 3.2 $N \geq 3, \Omega = B_R, p \in (p_s, p_L)$ とする. $u_0^* \in \partial A \setminus \{0\}$ が球対称な

ら解 $u^* = u^*(\cdot, t; u_0^*)$ は有限時間で爆発. さらに $T(u_0^*) < T^c(u_0^*) = \infty$.

証明 もし u^* が時間大域的と仮定する. 定理 3.1 より任意の正值球対称時間大域解は一様有界. よって定常解 v に収束. 下記の補題 3.4 より $v \neq 0$. これは $p > p_s$ のときは正值定常解がないので矛盾. 後半は次のスライドの補題を使う.

補題 3.4 (Lions (82), Ni-Sack-Tavanzi (84))

$$A := \{u_0 \in L^\infty(\Omega); u_0 \geq 0 \text{ かつ } u(x, t; u_0) \text{ は一様有界で } \lim_{t \rightarrow \infty} u(\cdot, t; u_0) = 0\}$$

は $L^\infty(\Omega)$ の開集合.

補題 3.5 任意の正值時間大域解に対して

$$\int_{\Omega} u \, dx \leq C \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}, \quad \int_0^t \int_{\Omega} u^p \, dx ds \leq C \lambda_1^{\frac{1}{p-1}} (1 + \lambda_1 t) \quad t \geq 0.$$

Kaplan の定理 (対偶) より $C = C(p, \Omega) > 0$ に対して

$$\int_{\Omega} u \varphi_1 \, dx \leq C \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}. \quad (12)$$

(P) の両辺に φ_1 をかけて積分:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \varphi_1 \, dx = -\lambda_1 \int_{\Omega} u \varphi_1 \, dx + \int_{\Omega} u^p \varphi_1 \, dx.$$

両辺を t に関して積分すると

$$\int_{\Omega} u \varphi_1 \, dx - \int_{\Omega} u_0 \varphi_1 \, dx = -\lambda_1 \int_0^t \int_{\Omega} u \varphi_1 \, dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} u^p \varphi_1 \, dx ds.$$

この式と (12) と $u \geq 0$ より $\int_0^t \int_{\Omega} u^p \varphi_1 \, dx ds \leq C \lambda_1^{\frac{1}{p-1}} (1 + \lambda_1 t)$. これと (12) と動平面の方法から結論の不等式を得る.

補題 3.5 と極限論法より $u^* \in \partial A$ に対しても補題 3.5 の不等式が成り立つことが示せる. 定義 3

の条件 (i)-(iii) もこれからすぐに示せる.

4 Part IV – 曲線短縮流への応用

Allen-Cahn 方程式と特異極限

$$u_t = \Delta u + f(u), \quad f(u) = u(1-u)(u-a)$$

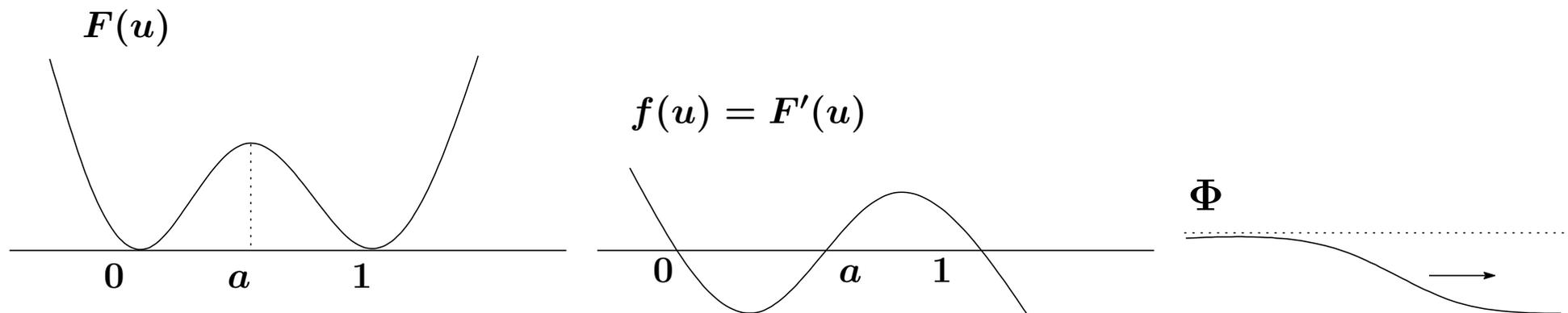
$$(B) \int_0^1 f(u) du = 0 \iff \nu = 0 \text{ (Balanced)}$$

$$(U) \int_0^1 f(u) du > 0 \iff \nu > 0 \text{ (Unbalanced)}$$

進行波解:

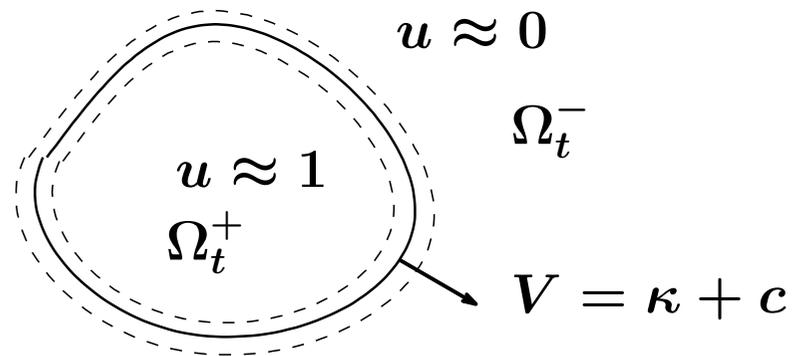
$$u(x, t) = \Phi(x - \nu t) \quad \Phi'' + \nu\Phi' + F(\Phi) = 0, \quad \Phi(-\infty) = 1, \quad \Phi(\infty) = 0.$$

$$\nu = \sqrt{2}(1/2 - a): \text{ 進行速度, } \Phi = (1 + e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}})^{-1}: \text{ プロファイル}$$



$u_t^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}(f + \varepsilon g)$. ここで f はバランス型で g は摂動

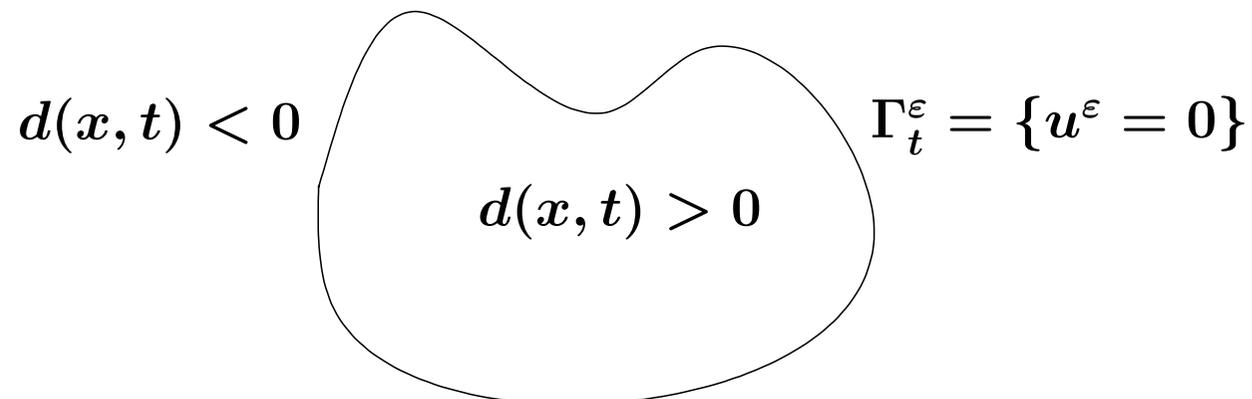
極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ のもとで



形式的漸近展開

$$u^\varepsilon(x, t) = U_0\left(\frac{d(x, t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon U_1\left(x, t, \frac{d(x, t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 U_2\left(x, t, \frac{d(x, t)}{\varepsilon}\right) + \dots$$

$d(x, t)$: signed-distance function



形式的漸近展開

$$u^\varepsilon(x, t) = U_0\left(\frac{d(x, t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon U_1\left(x, t, \frac{d(x, t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 U_2\left(x, t, \frac{d(x, t)}{\varepsilon}\right) + \dots$$

ここで U_i は g に依存する:

$$U_0'' + f(U_0) = 0, \quad U_0(-\infty) = 1, \quad U_0(0) = \frac{1}{2}, \quad U_0(\infty) = 0,$$

$$U_{1zz} + f'(U_0)U_1 = U_0' (d_t - \Delta d) + g(x, t, U_0).$$

U_1 に関する可解条件より

$$d_t = \Delta d + c \quad x \in \Gamma_t^\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad V = k + c,$$

ここで

$$c = \frac{-\int_{\mathbb{R}} g(U_0)U_0' dz}{\int_{\mathbb{R}} U_0'^2 dz} = \frac{-\int_0^1 g(u) du}{\int_{\mathbb{R}} U_0'^2 dz}$$

Ref) Alfaro-Hilhorst-Matano(08)

界面エネルギー → 表面張力

$$u_t = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}(f(u) + \varepsilon g(u)), \quad \int_0^1 f(u) du = 0, \quad g > 0$$

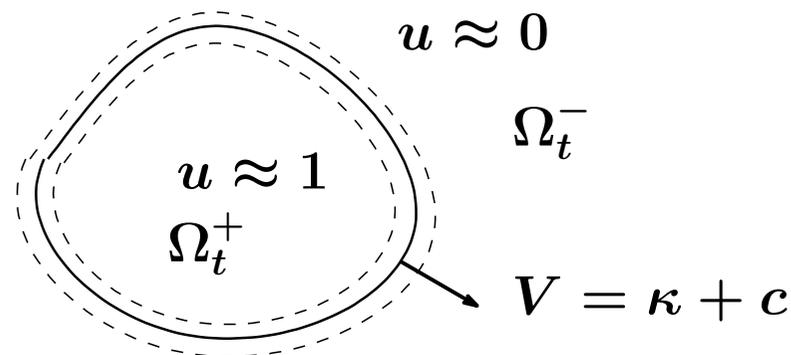
付随する自由エネルギー

$$J_\varepsilon[u] = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (F(u) - \varepsilon G(u)) \right) dx$$

$$\rightarrow \int_0^1 \sqrt{2F(u)} du \cdot \text{Length}(\Gamma(t)) - (G(1) - G(0)) \cdot \text{Volume}(\Omega_t^+)$$

物理的には：一定張力 τ ：ポテンシャルエネルギー = $\tau \times length$

界面は張力 τ で小さくなりたがる．領域 Ω_t^+ は大きくなりたがる



曲線短縮流

$\gamma(\sigma, t) : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$: 正則な閉曲線: $\Gamma(t)$

$s(\sigma, t)$: 弧長パラメータ — $\frac{ds}{d\sigma} = |\gamma_\sigma|$

単位接ベクトル $\vec{T} = \frac{\gamma_\sigma}{|\gamma_\sigma|} = (\cos \theta, \sin \theta)$

\mathcal{R} : $\pi/2$ 回転行列

単位法ベクトル: $\vec{N} = \mathcal{R}\vec{T} = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

フレネ・セレの公式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\vec{T} &= (-\sin \theta, \cos \theta) \frac{d\theta}{ds} = k\vec{N}, \\ \frac{d}{ds}\vec{N} &= (-\cos \theta, -\sin \theta) \frac{d\theta}{ds} = -k\vec{T}, \end{aligned}$$

曲線短縮流

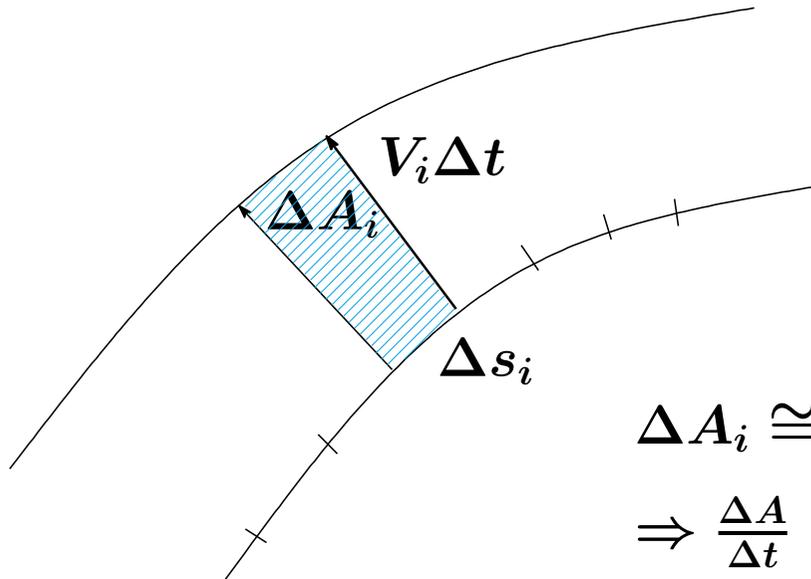
$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(\sigma, t) = k \vec{N} \iff \gamma_t = k \vec{N} = \vec{T}_s = (\gamma_s)_s = \gamma_{ss}$$

法線速度 V での曲線の変形

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(\sigma, t) = V \vec{N}$$

面積の第一変分

$$\frac{dA(t)}{dt} = - \int_{\Gamma(t)} V ds$$



$$\Delta A_i \cong V_i \Delta t \Delta s_i$$

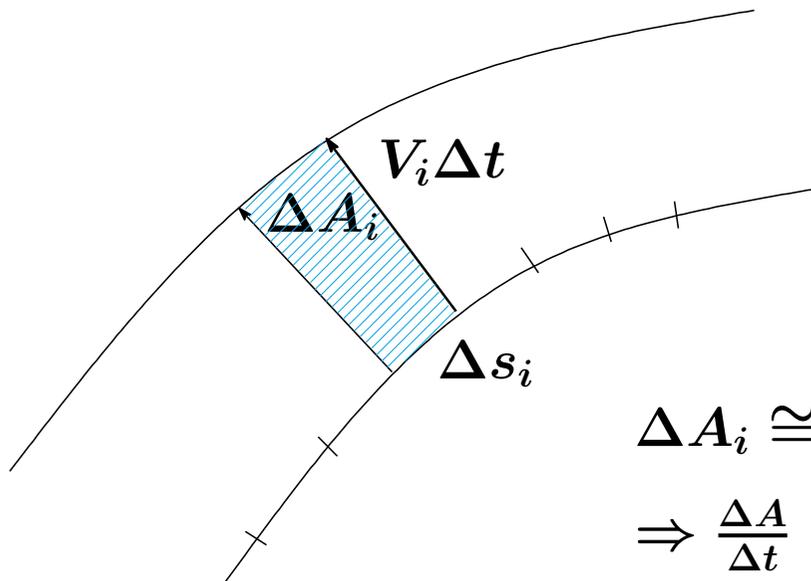
$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \sum_i \frac{\Delta A_i}{\Delta t} \cong \sum_i V_i \Delta s_i$$

法線速度 k での曲線の変形

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(\sigma, t) = k \vec{N}$$

面積の第一変分

$$\frac{dA(t)}{dt} = - \int_{\Gamma(t)} k ds = - \int_{\Gamma(t)} d\theta = -2\pi$$



$$\Delta A_i \cong V_i \Delta t \Delta s_i$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \sum_i \frac{\Delta A_i}{\Delta t} \cong \sum_i V_i \Delta s_i$$

Ex) 半径 R_0 の円周

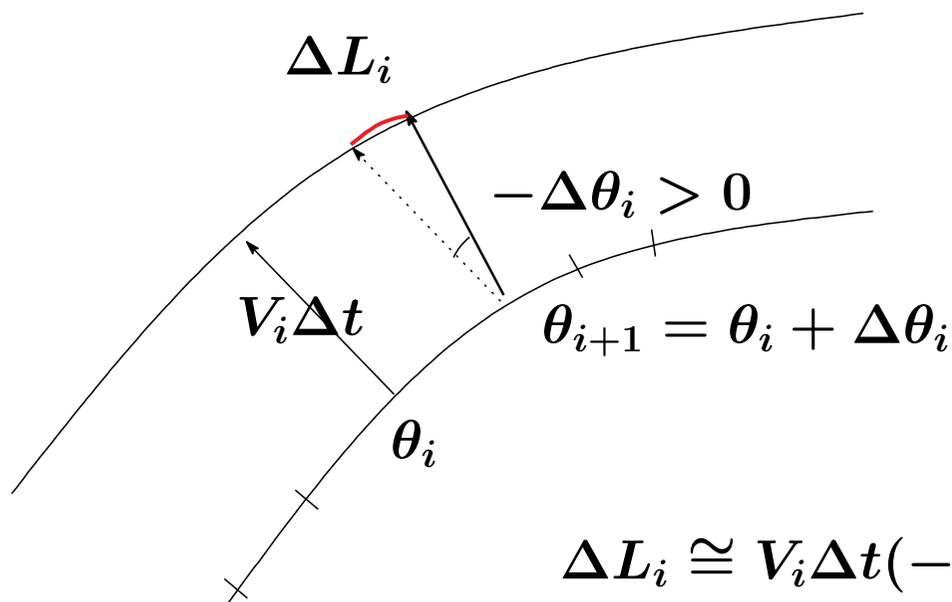
$$A(t) = \pi R(t)^2 = \pi R_0^2 - 2\pi t \Rightarrow R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2t}$$

法線速度 V での曲線の変形

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(\sigma, t) = V \vec{N}$$

長さの第一変分

$$\frac{dL(t)}{dt} = - \int_{\Gamma(t)} kV ds, \quad L(t) : \text{曲線の長さ}$$



$$\Delta L_i \cong V_i \Delta t (-\Delta\theta_i) = (-\kappa_i) V_i \Delta s_i \Delta t$$

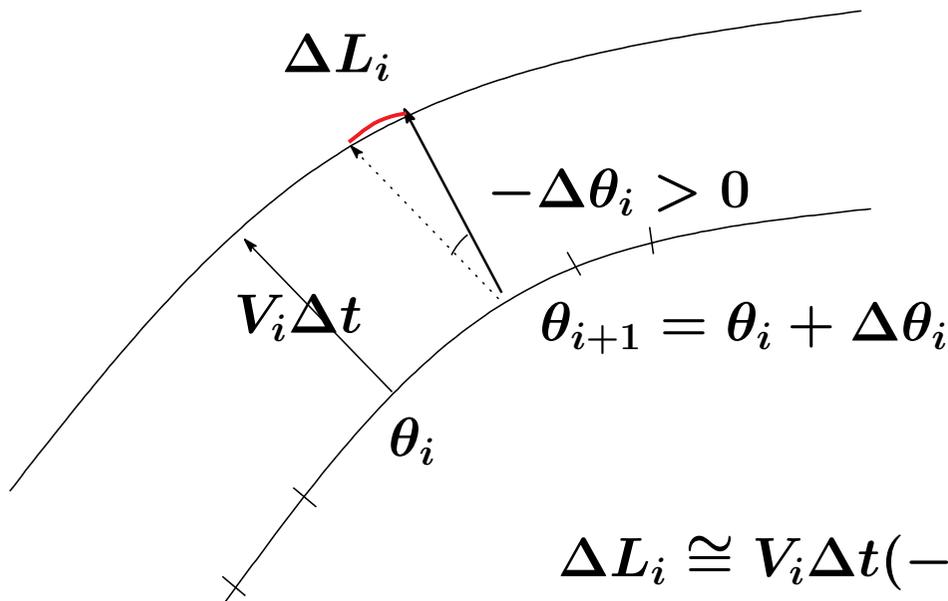
$$\Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_i \Delta L_i \cong \sum_i (-\kappa_i) V_i \Delta s_i$$

法線速度 k での曲線の変形

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(\sigma, t) = k \vec{N}$$

長さの第一変分

$$\frac{dL(t)}{dt} = - \int_{\Gamma(t)} k^2 ds$$



$$\begin{aligned} \Delta L_i &\cong V_i \Delta t (-\Delta\theta_i) = (-\kappa_i) V_i \Delta s_i \Delta t \\ \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \sum_i \Delta L_i \cong \sum_i (-\kappa_i) V_i \Delta s_i \end{aligned}$$

法線速度 k での曲線の変形

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(\sigma, t) = k \vec{N}$$

長さの第一変分

$$\frac{dL(t)}{dt} = - \int_{\Gamma(t)} k^2 ds$$

物理的な意味:

調和振動: ポテンシャルエネルギー = ばね定数 \cdot 長さ²/2

張力一定 (紐): ポテンシャルエネルギー = $\tau \times$ 長さ

紐は曲線短縮流に沿って縮もうとする

曲率の発展方程式

$$k_t = k_{ss} + k^3$$

$\Gamma(t)$ が Type I とは $\sup_{t \in [0, T)} (T - t)k^2(\cdot, t) < \infty$. otherwise Type II.

例 1 潰れる円周解は Type I $k(\cdot, t) = 1/\sqrt{2(T - t)}$

例 2 Angenent ovals は Type II (Grim Reaper 解を 2 つ接合した形)

$$k^2(\theta, t) = \lambda \left(\frac{1}{1 - e^{2\lambda t}} - \sin^2(\theta + \gamma) \right), \quad t < 0.$$

ここで $\lambda > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ はパラメーター.

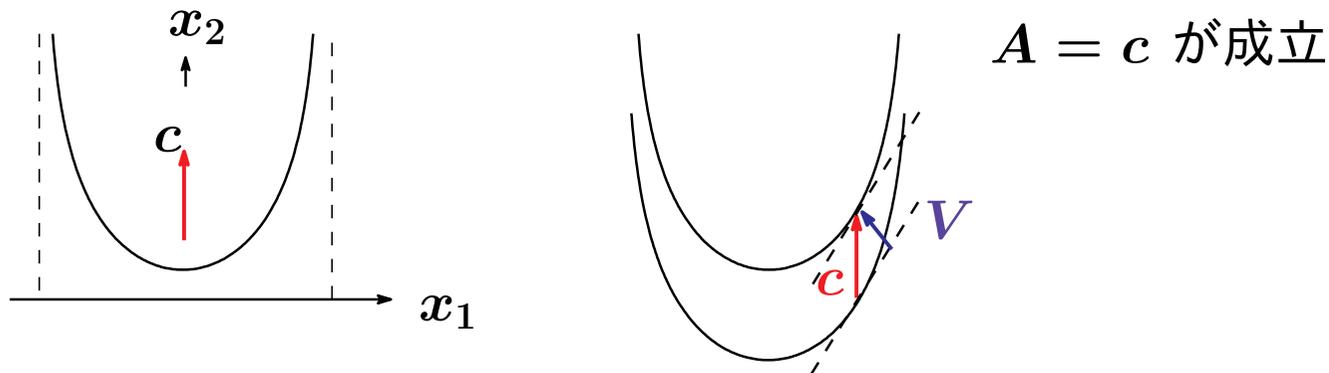
定理 (Hamilton-Sesum 2010)

時間 $t \in [-\infty, 0)$ で定義される古代解は凸ならば Angenent ovals か円周.

例 3 Grim Reaper 解

曲率方程式の定常解 $0 = k_t = k^2(k_{\theta\theta} + k), \quad \theta = \arccos \langle e_1 | \vec{N} \rangle.$

$k(\pi/2 - 0, t) = k(-\pi/2 + 0, t) = 0, k > 0$ より $k(\theta, t) = A \cos \theta.$



$x_2 = f(x_1) + ct$ とおくと
$$\frac{f''}{(1 + (f')^2)^{3/2}} = \frac{c}{1 + (f')^2}.$$

 $c = (\arctan f'(x_1))'$ を積分したら $f'(x_1) = \tan(cx_1 + c_1).$

漸近線が x_1 軸対称なので ($c_1 = c_2 = 0$)

$$f(x_1) = c_2 - \frac{1}{c} \log \cos(cx_1 + c_1) \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) = -\frac{1}{c} \log \cos x_1.$$

単調性公式

局所的なリャプノフ関数: Gaussian 密度比 $\int_{\gamma_t} \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(T-t)}}}{\sqrt{4\pi(T-t)}} ds$

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(T-t)}}}{\sqrt{4\pi(T-t)}} ds = - \int_{\gamma_t} \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(T-t)}}}{\sqrt{4\pi(T-t)}} \left| k + \frac{(x - x_0 \cdot \nu)^2}{2(T-t)} \right| ds \quad t \in [0, T).$$

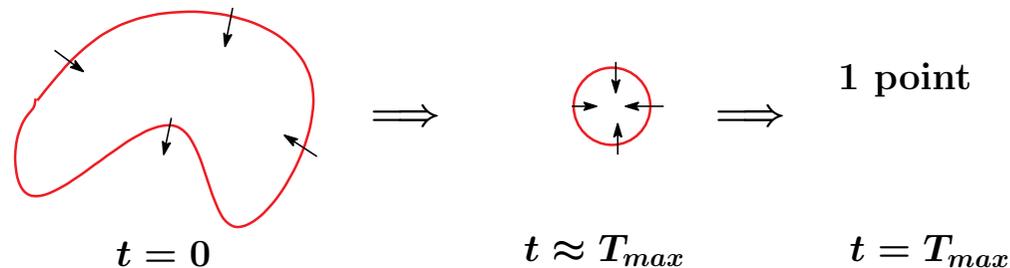
時空間スケーリングして書くと時間大域的なリャプノフ関数を得る.

$$\tilde{\gamma}^{x_0}(\tau) = \tilde{\gamma}(\tau) := \frac{\gamma(t(\tau)) - x_0}{\sqrt{2(T-t(\tau))}}, \quad t(\tau) = T - e^{-2\tau}, \quad \tau \in [-\log T/2, +\infty).$$

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\tilde{\gamma}(\tau)} e^{-\frac{|\tilde{\gamma}(\tau)|^2}{2}} ds = - \int_{\tilde{\gamma}(\tau)} e^{-\frac{|\tilde{\gamma}(\tau)|^2}{2}} \left| k_{\tilde{\gamma}(\tau)} + \langle \tilde{\gamma}(\tau) | \nu_{\tilde{\gamma}(\tau)} \rangle \right|^2 ds.$$

Type I のときは Huisken の埋め込み比定理からコンパクト性がしたがう. 力学系理論の標準的な議論が使えて, オメガ極限集合 \subset (スケール後方程式の) 定常解の族.

定理 4.1 [Gage-Hamilton(86), Grayson(87)] 埋め込まれた閉曲線が曲線短縮流で縮むと、ある時刻以降は凸な閉曲線になる。また適当にスケールすると円周に収束する。



Step 1) Type II が起きないことを示す。

Hamilton スケール極限と Huisken の埋め込み比

\implies Type I のときは爆発問題の Type I の解析に帰着。

Step 2) $C^{1+\alpha}$ -収束をリャプノフ関数 (単調性公式) を用いて示す。

Step 3) C^2 -収束を示す。Angenent の交点数の方法か正則性の解析的な議論

Hamilton のスケージング法

$\exists t_n \in [0, T - 1/n], \exists \sigma_n \in S^1$ s.t.

$$|k(\sigma_n, t_n)|^2(T - 1/n - t_n) = \max_{t \in [0, T-1/n], \sigma \in S^1} |k(\sigma, t)|^2(T - 1/n - t). \quad (13)$$

タイプ II ならば $n \rightarrow \infty$ のとき無限大に発散.

$\Rightarrow n \rightarrow \infty$ のとき $t_n \nearrow T$ であり $|k(\sigma_n, t_n)|$ が単調に発散して $\sigma_n \rightarrow p$ かつ

$$|k(\sigma_n, t_n)|^2 t_n \rightarrow \infty, \quad |k(\sigma_n, t_n)|^2(T - 1/n - t_n) \rightarrow \infty$$

スケールされた曲線 γ_s^∞ は再び曲線短縮流を満たす全域解 ($t \in \mathbb{R}$):

$$\gamma_n(\sigma, s) := |k(\sigma_n, t_n)|[\gamma(p, s/|k(\sigma_n, t_n)|^2 + t_n) - \gamma(\sigma_n, t_n)] \rightarrow \gamma_s^\infty.$$

$$I_n := [-|k(\sigma_n, t_n)|^2 t_n, |k(\sigma_n, t_n)|^2(T - 1/n - t_n)] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \gamma_n(\sigma_n, 0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ であり $|k(\sigma_n, 0)| = 1$.

\Rightarrow 実は γ_s^∞ は凸曲線で Grim-Reaper 解に一致する (Hamilton 95).

命題 4.2 狭義凸曲線の全域解は Grim-Reaper 解に一致する (Hamilton 95)

Harnack type 評価

$$W = \partial_t k - k_s^2/k \geq 0.$$

k がある点で最大値を達成するとそこで $\partial_t k = \partial_s k = 0$.

$$(\partial_t - \partial_{ss})W = \frac{2W^2}{k} + Wk^2.$$

最大値原理より $W \equiv 0$. すなわち

$$k_{ss} + k^3 - \frac{k_s^2}{k} = 0.$$

この常微分方程式を解くと Grim-Reaper 解になる.

命題 4.3 Huisken の埋め込み比 (98):

L_t は閉曲線 γ_t の長さ.

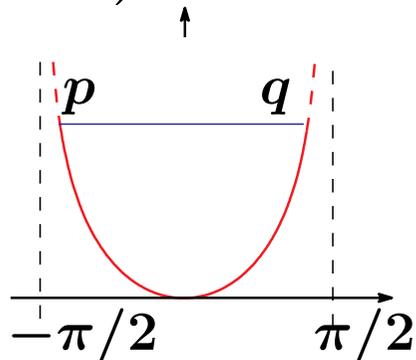
$$\Phi_t(p, q) = \begin{cases} \frac{\pi|p-q|}{L_t} / \sin \frac{\pi d_t(p, q)}{L_t}, & p \neq q, \\ 1, & p = q. \end{cases}$$

ここで $d_t(p, q)$ は γ_t に沿った p, q の間の距離で $|p - q|$ はユークリッド距離.

このとき関数 $E(t) = \inf_{p, q} \Phi_t(p, q)$ は $E(t) < 1$ のときは常に単調増大, 特に埋め込まれた閉曲線は存在する限り, 埋め込まれたままで自己交差しない.

系 自己交差のない初期値を与えたとき, タイプII 爆発は起こりえない.

証明) Grim-Reaper の Huisken 埋め込み比 0. スケーリングで埋め込み比不変.

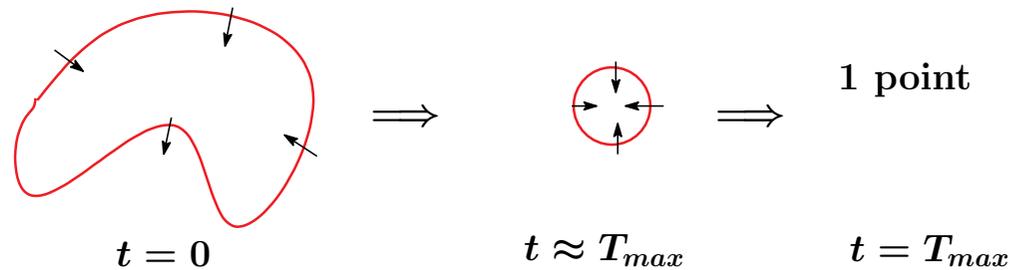


$$|p - q| \approx \pi$$

$$d(p, q) \geq -\log(\cos(\pi/2 - \varepsilon))$$

$$\frac{|p-q|}{d(p, q)} \leq \frac{\pi - \varepsilon}{-\log \cos(\pi/2 - \varepsilon)} \rightarrow 0$$

定理 [Gage-Hamilton(86), Grayson(87)] 埋め込まれた閉曲線が曲線短縮流で縮むと、ある時刻以降は凸な閉曲線になる。また適当にスケーリングすると円周に収束する。



ステップ 1 スケールされた曲線族のコンパクト性 \Leftarrow Huisken の埋め込み比

ステップ 2 スケーリング曲線の長さ

$$\frac{1}{\sqrt{2(T-t)}} \cdot \Gamma(t) = e^{\tau/2} \Gamma(T - e^{-\tau}) \quad \tau = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{T-t} \right).$$

は **リャプノフ関数** (Huisken 90). したがって

$$e^{\tau_n/2} \Gamma(T - e^{-\tau_n}) \rightarrow \text{定常解} =: \mathcal{C}^* \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

[Abresch-Langer 86] より定常解 \mathcal{C}^* は単位円周しかない。よって

$$e^{\tau/2} \Gamma(T - e^{-\tau}) \rightarrow \mathcal{C}^* \quad \text{as } s \rightarrow \infty \quad \text{in } C^{1+\alpha}$$

C^2 収束について – 半線形, 固定境界問題の正則性

変数変換 $\tau = \int_0^t \frac{dt}{L^2(t)}$, $z = \frac{s}{L(t)}$ を考える.

関数 $w(z, \tau) = \Theta(s, t)$, $\eta(\tau) = \log L(t)$ は **半線形**熱方程式を満たす:

$$\begin{cases} w_\tau = w_{zz} + \left[\int_0^z w_z^2 dz - z \int_0^1 w_z^2 dz \right] w_z, & z \in (0, 1), \tau > 0, \\ w(0, \tau) = 0, w(1, \tau) = 2\pi, & \tau \geq 0, \\ \eta'(\tau) = - \int_0^1 w_z^2 dz, & \tau \geq 0, \end{cases}$$

固定境界で斉次 Dirichlet 境界条件なので Weissler あるいは Henry (80年代) レベルの半群理論で十分である.

漸近凸性について

$\Gamma(t)$ $C^{1+\alpha}$ -収束. (単調性公式と等周比評価) $\Rightarrow w : C^\alpha$ -収束 $\implies w : C^\infty$ -収束

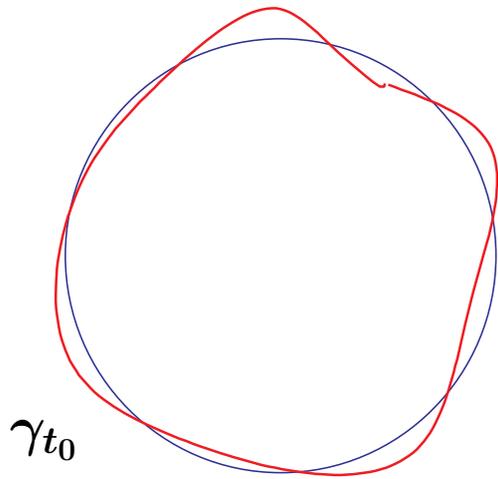
$\Rightarrow \Gamma(t) : C^2$ -収束

C^2 収束について – C^1 収束から星形までわかる

Angenent の方法

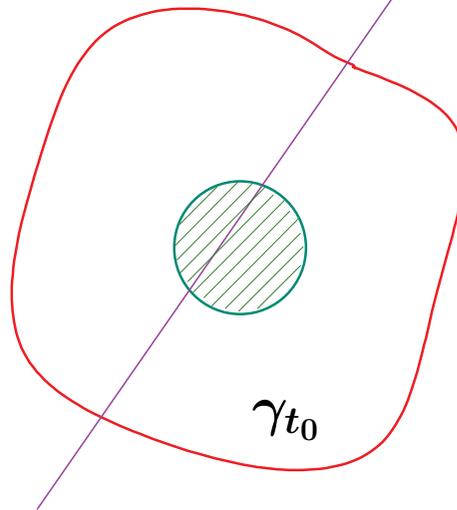
斜線は星形の中心点達

$\forall l$ s.t. 斜線を通過



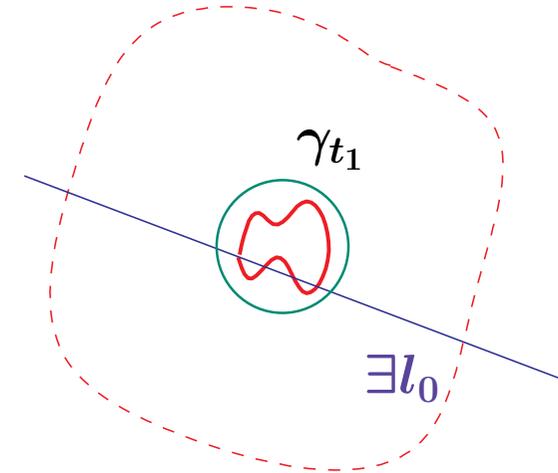
$t = t_0 \approx T$

γ_{t_0} 内部は星形



$t = t_0$ 星形領域

$Z[\gamma_{t_0}, l] = 2$



$t = t_1 \approx T$: If γ_{t_1} が凸でない

$Z[\gamma_{t_1}, l_0] \geq 3$

一方, 交点数非増大 より $t_0 \leq t \leq T$ で $Z[\gamma_t, l_0] \leq 2$
よって矛盾

4.1 $V = k^\alpha \quad \alpha \in (0, 1]$

C^2 級の狭義凸曲線 γ_0 (初期曲線)

$$V = k^\alpha, \quad \text{法速度 } V, \quad \text{曲率 } k$$

$\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 偏角を用いると

$$k_t = k^2(V_{\theta\theta} + V) = k^2\{(k^\alpha)_{\theta\theta} + k^\alpha\}$$

あるいは

$$V_t = \alpha V^{1+\frac{1}{\alpha}}(V_{\theta\theta} + V).$$

性質 (1) 狭義凸は保たれる. 2つの閉曲線の包含関係は保たれる.

性質 (2) 有限時間で一点に潰れる. $C(T-t)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$ 半径の円周解と比較原理

性質 (3) 交点数は非増大

自己相似解

$$\gamma_t = (T - t)^{\frac{1}{1+\alpha}} \cdot \gamma^*$$

時空間のスケーリング

γ_t は $t = T$ で消滅.

$$\tilde{\gamma}_\tau = (T - t)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \cdot \gamma_t, \quad \tau = \log \frac{1}{T - t}.$$

ここで

$$u(\theta, t) = (T - t)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} V(\theta, t) = e^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}\tau} V(\theta, T - e^{-\tau}).$$

は以下の方程式を満たす.

$$u_\tau = \alpha u^{1+\frac{1}{\alpha}} \left(u_{\theta\theta} + u - \frac{1}{1+\alpha} \frac{1}{u^\alpha} \right)$$

定常解が自己相似解のプロファイルに対応する. 自明解: $u^* = \left(\frac{1}{1+\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \dots$ 円周.

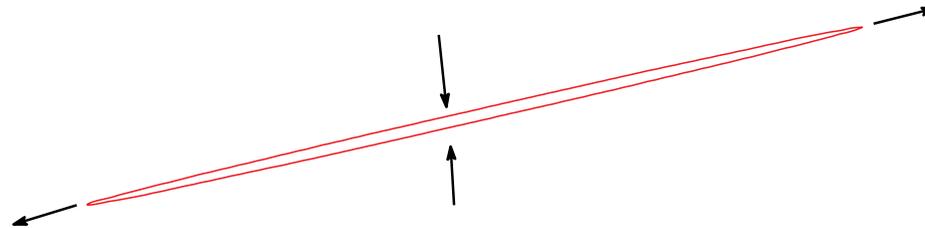
スケーリング $\tilde{\gamma}_\tau = (T - t)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \cdot \gamma_t, \quad \tau = \log \frac{1}{T-t}.$

(1) 定常円の直径 $\leq \tilde{\gamma}_\tau$ の最大直径 (比較原理よりわかる)

(2) $\tilde{\gamma}_\tau$ は $\tau \rightarrow \infty$ で有界 $\Rightarrow \tilde{\gamma}_\tau$ は定常曲線に収束. (単調性公式より)

(3) $\tilde{\gamma}_\tau$ が $\tau \rightarrow \infty$ で非有界

$\Rightarrow \tilde{\gamma}_\tau$ ある特定の方向にだけ伸びてそれと垂直な方向は縮む (2本の縮退した直線)



定理

(1) $\alpha \in (1/3, 1]$: Type I で定常解 (円周のみ) に近づく.

(2) $\alpha = 1/3$: Type I で定常解 (定常円と同じ面積の任意の楕円) に近づく.

(3) $\alpha \in (0, 1/3)$: Type II の初期値が存在.

定理

- (1) $\alpha \in (1/3, 1]$: Type I で定常解 (円周のみ) に近づく.
- (2) $\alpha = 1/3$: Type I で定常解 (定常円と同じ面積の任意の楕円) に近づく.
- (3) $\alpha \in (0, 1/3)$: Type II の初期値が存在.

定常解の安定性 (なぜ $1/3$ が境目)

$\alpha > 1/3$ のとき円周のプロファイルが安定. $\alpha < 1/3$ 不安定方向がある.

$\alpha = 1/3$ のときは方程式が Affine 変換で不変.

$$u_{\theta\theta} + u - \frac{1}{1+\alpha} \frac{1}{u^\alpha} = 0$$

の $\bar{u} = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$ で線形化固有値問題:

$$\varphi_{\theta\theta} + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\varphi = -\lambda\varphi.$$

$\lambda_j = j^2 - (1/\alpha + 1)$ なので $\alpha = 1/3$ は λ_2 の符号を変える閾値.

自己相似解の解析

$$u_{\theta\theta} + u - \frac{1}{1+\alpha} \frac{1}{u^\alpha} = 0$$

はハミルトニアン

$$H(u, u_\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(u_\theta^2 + u^2 - \frac{2u^{1-\alpha}}{(1+\alpha)(1-\alpha)} \right), & \alpha \neq 1, \\ \frac{1}{2} (u_\theta^2 + u^2 - \log u), & \alpha = 1. \end{cases}$$

ここで shooting でこの微分方程式を解く.

$$u(0; a) = a, \quad u_\theta(0, a) = 0$$

を $a \in [1, \infty)$ で動かす. 埋め込まれた曲線は円周解のみで $u(0 : a)$ の周期 $T = 2r\pi/\ell$ が満たす条件は [Abresch-Langer (86), Zevin-Pinsky (01)]

$$\frac{1}{2} < \frac{r}{\ell} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\alpha = 1).$$

Abresch-Langer 解と交点数で Type I-II の証明

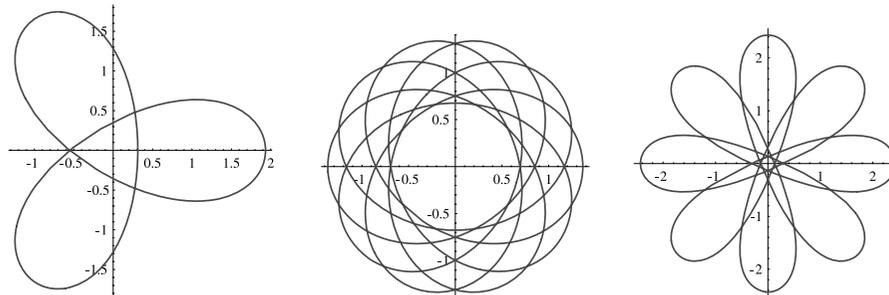
自己交差も許して自己相似解を探す (86):

$\tilde{\gamma}_{r,l}$ 回転数が r 葉っぱの枚数が l

実は次の事実が知られている [Zevin-Pinsky (01)]:

Fact: $2r > l$ ($1/3 < \alpha \leq 1$) **Fact: $2r < l$ ($0 < \alpha < 1/3$)**

下図は左から $\tilde{\gamma}_{2,3}$, $\tilde{\gamma}_{7,10}$, $\tilde{\gamma}_{5,8}$ の図 ($\alpha = 1$)



Fact: $2r > \ell$ ($1/3 < \alpha \leq 1$) Type I しか起きないことを示す.

自己相似解に付随する放物型スケーリングをする.

$\tilde{\gamma}_{r,\ell}$ の花びらは, ほとんど線分状で原点近くから「細く長く」生えているので

$$Z[\tilde{\gamma}_{\tau_0}, \tilde{\gamma}_{r,\ell}] = 2\ell, \quad \tau_0 = \frac{\log T}{2}.$$

Strum の第 1 定理より

$$Z[\tilde{\gamma}_\tau, \tilde{\gamma}_{r,\ell}] \leq 2\ell, \quad \tau \geq \tau_0.$$

もしタイプ II 消滅が起きたら $\tilde{\gamma}_\tau$ は 1 本の縮退した原点を通る 2 本の直線に近づ

くので

$$Z[\tilde{\gamma}_\tau, \tilde{\gamma}_{r,\ell}] = 4r, \quad \tau \gg \tau_0 \Rightarrow 2r \leq \ell$$

ところが $2r > \ell$ のときしか Abresch-Langer 解は存在しないので矛盾.

Fact: $2r < \ell$ ($0 < \alpha < 1/3$) Type II が起きることを示す.

もし任意の解が Type I 消滅ならば初期値を

$$Z[\tilde{\gamma}_{\tau_0}, \tilde{\gamma}_{r,\ell}] = 4r$$

であるようにとる. $\tau \rightarrow \infty$ のとき解が有界ならば有界定常曲線に収束するので

$$Z[\tilde{\gamma}_{\tau}, \tilde{\gamma}_{r,\ell}] = 2\ell.$$

ところが $2r < \ell$ なので Sturm の第 1 法則に矛盾.

参考文献:

[1] 微分方程式と固有関数展開, 小谷 眞一, 俣野 博, 岩波書店.

[2] *Geometric Sturmian Theory of Nonlinear Parabolic Equations and Applications*, Victor A. Galaktionov, Chapman and Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science, 2004.

[3] 非線形熱方程式の爆発問題入門 – Marek Fila氏講義, 俣野博監修, 下條昌彦執筆, 東京大学数理科学レクチャーノート 10.

[4] *Lecture Notes on Mean Curvature Flow*, Carlo Mantegazza, Birkhaeuser, Progress in Mathematics Volume 290, 2011.